

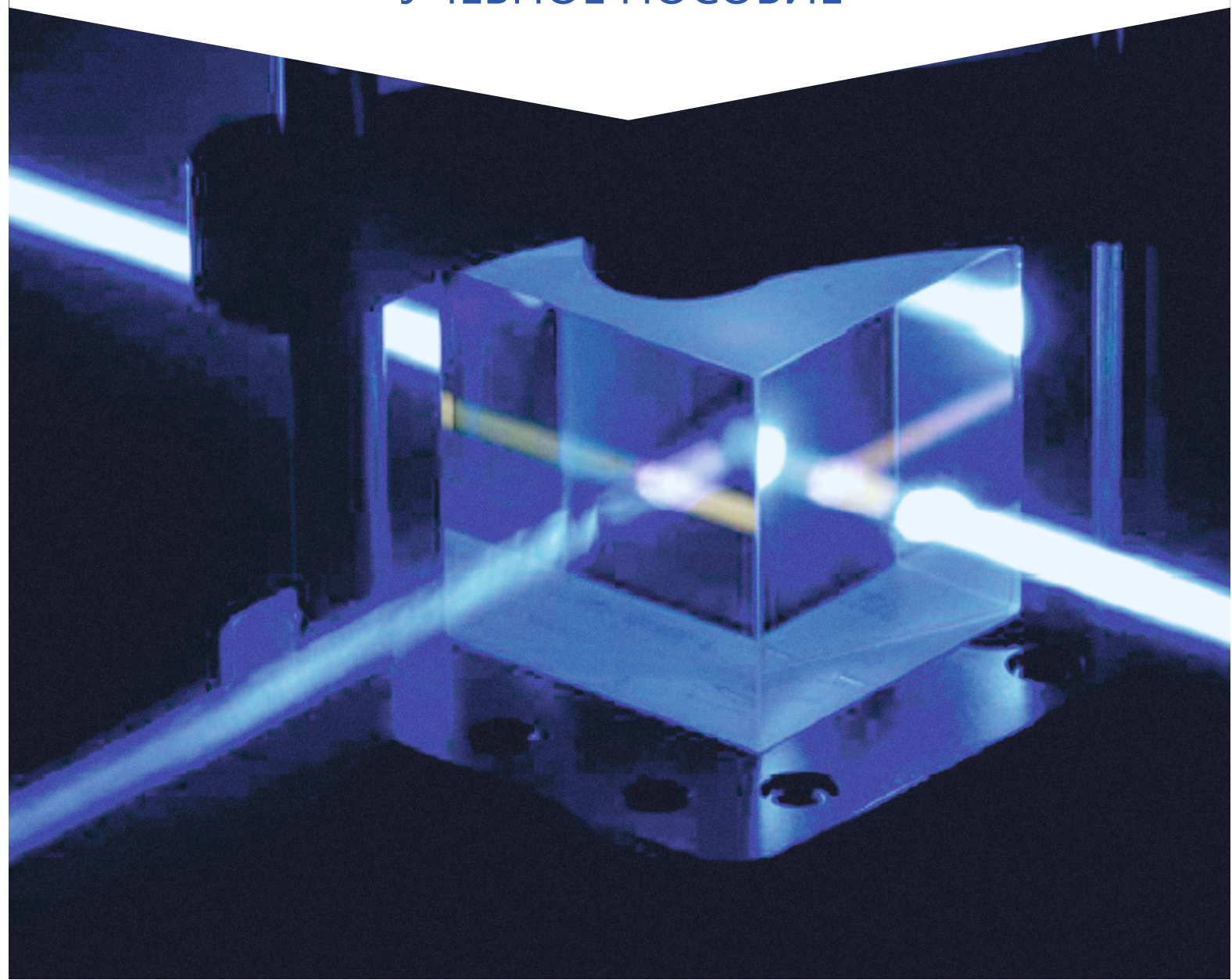


Южно-Уральский
государственный
университет

Национальный
исследовательский
университет

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПТИЧЕСКОЙ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАТИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра физики наноразмерных систем

535
Ф505

А.П. Алоджанц, В.П. Бескачко, Д.В. Царёв, Д.А. Куц,
С.А. Подошведов, С.П. Кулик

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПТИЧЕСКОЙ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАТИКИ

Учебное пособие

Под редакцией С.П. Кулика

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2023

УДК 535(075.8) + 004(075.8)
Ф505

Одобрено
учебно-методической комиссией
Института естественных и точных наук

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор Богданов Ю.И.,
кандидат физико-математических наук, доцент Минаев Д.В.

Пособие подготовлено лабораторией «Квантовая инженерия света»
ФГАОУ ВО «ЮУрГУ (НИУ)» при поддержке Министерства науки и высшего
образования Российской Федерации (договор № 075-15-2022-1116)

Авторский коллектив:

А.П. Алоджанц, В.П. Бескачко, Д.В. Царёв, Д.А. Куц,
С.А. Подошведов, С.П. Кулик

Физические основы оптической квантовой информатики:
Ф505 учебное пособие / А.П. Алоджанц, В.П. Бескачко, Д.В. Царёв и др.;
под ред. С.П. Кулика. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ,
2023. – 88 с.

ISBN 978-5-696-05413-1

Пособие предназначено для студентов физических и инженерных на-
правлений подготовки, предусматривающих освоение учащимися компе-
тенций в области квантовых технологий.

Цель пособия – предоставить студентам теоретические и практиче-
ские навыки для изучения и понимания физических явлений, лежащих в
основе квантовых информационных технологий, реализуемых на фотон-
ной платформе, а также возбудить интерес к прикладным и инженерным
задачам в этой области. Пособие охватывает свойства квантованного по-
ля излучения, способы его регистрации, квантовые модели взаимодейст-
вия двухуровневых систем с электромагнитным полем. Для успешного
освоения материала необходимы знания по общей физике, квантовой ме-
ханике и алгебре. Особое внимание уделяется задачам, направленным на
понимание и обобщение материала.

УДК 535(075.8) + 004(075.8)

ISBN 978-5-696-05413-1

© Издательский центр ЮУрГУ, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ И ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ	
1.1. Векторы в гильбертовом пространстве; принцип суперпозиции	6
1.2. Операторы физических величин в гильбертовом пространстве	9
1.3. Задача на собственные функции (с.ф.) и собственные значения (с.з.).	11
1.4. Статистические свойства наблюдаемых.....	12
1.5. Смешанные состояния; оператор плотности.....	14
1.6. Динамические свойства квантовых систем	
1.6.1. Представление Шредингера.....	15
1.6.2. Представление Гейзенберга	16
1.7. Задачи	18
2. КВАНТОВАНИЕ СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ	
2.1. Вторичное квантование	21
2.2. Свойства квантованного электромагнитного поля	
2.2.1. Операторы поля.....	25
2.2.2. Дипольное приближение	27
2.3. Операторы квадратур одномодового поля	28
2.4. Задачи	28
3. ОСНОВНЫЕ КВАНТОВЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ	
3.1. Фоковские состояния электромагнитного поля.....	30
3.2. Оптические когерентные состояния	31
3.3. Детектирование квадратур квантованного светового поля	36
3.4. Сжатые (по флуктуациям) состояния света	
3.4.1. Одномодовое сжатое вакуумное состояние (ОСВС).....	38
3.4.2. Статистика фотонов	42
3.5. Генерация квадратурного сжатого света	
3.5.1. Спонтанное параметрическое рассеяние света (СПРС).....	44
3.5.2. Генерация одномодового сжатого света.....	46
3.6. Задачи	47

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОГЕРЕНТНОСТИ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ	
4.1. Когерентность первого порядка	
4.1.1. Степень когерентности классического поля	50
4.1.2. Степень когерентности квантованного поля.....	53
4.2. Когерентность второго порядка	
4.2.1. Эксперимент Хэнбери Брауна–Твисса.....	55
4.2.2. Степень когерентности второго порядка квантового поля.....	57
4.3. Задачи	58
5. КВАНТОВЫЕ ЗАПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СВЕТА	
5.1. Невырожденное СПРС.....	60
5.2. Эксперимент Хонга–Оу–Мандела (ХОМ)	
5.2.1. Квантовая интерференция фотонов	61
5.2.2. Классический предел эффекта ХОМ.....	64
6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХУРОВНЕВОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ С КЛАССИЧЕСКИМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ	66
6.1. Общее описание взаимодействия квантовой двухуровневой системы с классическим полем	66
6.2. Осцилляции Раби.....	68
6.3. «Одетые» состояния.....	69
6.4. Задачи	72
7. ПРОСТЫЕ КВАНТОВЫЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ	74
7.1. Модель Джейнса–Каммингса.....	74
7.2. Поляритоны в микрорезонаторе	80
7.3. Задачи	83
8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ	
8.1. Пример отчета по практической работе	86
8.2. Требования к работе.....	86
8.3. Шкала и критерии оценок	86
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	87

ВВЕДЕНИЕ

Квантовые состояния светового поля, формируемые в результате взаимодействия излучения с конденсированными средами – нелинейными кристаллами, двухуровневыми системами, представляют собой обширное направление современных научных исследований, имеющих прямой выход на решение современных практических задач в области технологий обработки и передачи информации. Эта тема лежит на стыке квантовой оптики, физики конденсированного состояния, метрологии, информационных и инженерных наук. Квантовые состояния светового поля являются незаменимым инструментом для изучения важнейших физических, химических и иных свойств вещества на уровне, недоступном классическим полям.

Курс «Физические основы оптической квантовой информатики» в ЮУрГУ предназначен для ознакомления студентов магистратуры с современными методами и подходами теоретических и экспериментальных исследований в этой области. Курс опирается на знания студентов в области квантовой механики, нелинейной оптики, преподаваемые на уровне бакалавриата.

Цель учебного пособия – предоставить студентам основные теоретические и практические навыки для изучения и понимания курса по квантовой оптике, возбудить интерес к прикладным и инженерным задачам в области современных квантовых технологий и квантовой информации. Хотя область исследований, посвященных взаимодействию света с веществом, довольно обширна, только несколько моделей могут быть решены точно; именно такие модели рассматриваются подробно в данном пособии.

Основные темы пособия охватывают свойства квантованного поля излучения, способы его регистрации, квантовые модели взаимодействия двухуровневых систем с электромагнитным полем. Для успешного освоения этого курса необходимы сведения из общего курса физики, квантовой механики и алгебры. Особое внимание уделяется задачам, направленным на понимание и обобщение материала.

Авторы благодарны коллегам за полезные замечания и помощь в работе.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ И ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

1.1. Векторы в гильбертовом пространстве; принцип суперпозиции

Целью данной главы является ознакомление читателя с основами универсального математического аппарата квантовой теории в формализме Дирака, применяемого в квантовой механике, квантовой оптике, а также в квантовой теории информации. Существует достаточно много литературы, где данный аппарат изложен в деталях, см., например, [1].

В квантовой теории состояние физической системы принято описывать вектором в абстрактном линейном гильбертовом пространстве, который в формализме Дирака обозначается символом $|\dots\rangle$ и называется *кет-вектором*. Вектор из пространства, сопряженного к данному, обозначается как *бра-вектор* $\langle\dots|$. В квантовой теории информации принято различать так называемые *дискретные переменные*, для которых вектора пробегают дискретный ряд значений, т.е. $|\phi_n\rangle \equiv |n\rangle$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Существуют также физические величины, которые имеет смысл характеризовать *непрерывными переменными*, и для которых вектор состояния обозначается как $|\phi(k)\rangle \equiv |k\rangle$, где k есть непрерывная величина, изменяющаяся в некотором конечном (или бесконечном) интервале.

Множество векторов \mathcal{L} образует линейное векторное пространство, если определена любая линейная комбинация векторов из этого множества, которая есть вектор, входящий в \mathcal{L} , а также определено умножение вектора на число.

В квантовой физике особую роль играет гильбертово пространство \mathcal{H} , которое есть полное бесконечномерное линейное векторное пространство с определенным скалярным произведением векторов и конечной нормой (длиной вектора). Поясним входящие в это определение понятия.

Максимальное количество линейно независимых векторов $|n\rangle$, где $n = 1, 2, \dots, D$ определяет *размерность пространства D* , а сами эти векторы образуют базис пространства. В случае гильбертова пространства *размерность D* бесконечна.

Условие полноты системы базисных векторов. Всякий вектор в пространстве размерности D может быть представлен в виде ряда (линейной комбинации) D линейно независимых векторов, образующих базисные вектора, которые можно выбрать бесконечным числом различных способов. Такая сумма имеет вид

$$|\phi\rangle = \sum_n^D c_n |n\rangle, \quad (1.1)$$

где c_n в общем случае – комплексные числа. Для непрерывных наблюдаемых (1.1) запишется в виде интеграла

$$|\phi\rangle = \int c(k)|k\rangle dk, \quad (1.2)$$

где $c(k)$ – комплексная функция непрерывного аргумента k .

Поскольку $|n\rangle$ и $|k\rangle$ составляют базис гильбертова пространства, то они взаимно-ортогональны, т.е.

$$(a) \quad \langle m|n\rangle = \delta_{mn} \equiv \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$(б) \quad \langle k'|k\rangle = \delta(k' - k),$$

где δ_{mn} – символ Кронекера, $\delta(k' - k)$ есть дельта-функция Дирака.

В выражениях выше встречаются комбинации $\langle m|n\rangle$, $\langle k'|k\rangle$, которые можно интерпретировать как «произведение» кет-вектора на бра-вектор. В более общем случае мы можем определить **скалярное произведение** произвольных двух векторов $|\phi\rangle$ и $|\psi\rangle$ в виде

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi| \cdot |\psi\rangle. \quad (1.4)$$

При этом бра-вектор $\langle\phi|$ считается (эрмитово) сопряженным вектору $|\phi\rangle$, и имеет следующий вид

$$\langle\phi| = (|\phi\rangle)^\dagger. \quad (1.5)$$

Соответственно, разложения (1.1), (1.2) в антилинейной форме будут выглядеть как:

$$(a) \quad \langle\phi| = \sum c_n^* \langle n|, \quad (1.6)$$

$$(б) \quad \langle\phi| = \int \langle k|c^*(k)dk.$$

Выражения (1.1)–(1.3) позволяют прояснить смысл коэффициентов c_n , $c(k)$. В частности, «домножив» слева (1.1) на $\langle m|$, и воспользовавшись свойством ортогональности (1.3)(a), имеем

$$\langle m|\phi\rangle = \langle m| \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n c_n \langle m|n\rangle = \sum_n c_n \delta_{mn} = c_m, \quad (1.7)$$

т.е. коэффициенты c_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) есть проекции («координаты») вектора $|\phi\rangle$ на соответствующие базисные направления $|n\rangle$. Умножение произвольного вектора на себя есть квадрат нормы вектора

$$\langle\phi|\phi\rangle = \|\phi\|^2 \geq 0, \quad (1.8)$$

определенный в \mathcal{H} -пространстве. Воспользовавшись разложениями (1.1), (1.2) можно показать, что

$$\langle\phi|\phi\rangle = \sum_i |c_i|^2, \quad \langle\phi|\phi\rangle = \int |c(k)|^2 dk. \quad (1.9)$$

Помимо (1.8) скалярное произведение обладает следующими свойствами:

- (а) $\langle \phi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \phi \rangle$ – эрмитова симметрия;
- (б) $\langle \phi | \psi + \xi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle + \langle \phi | \xi \rangle$ – дистрибутивность;
- (в) $\langle \phi | \alpha \psi \rangle = \alpha \langle \phi | \psi \rangle$ – ассоциативность.

Комплексное пространство, в котором каждой паре векторов $|\phi\rangle$ и $|\psi\rangle$ ставится в соответствие комплексное число $\langle \phi | \psi \rangle$, являющееся их скалярным произведением, называется *унитарным пространством*.

Таким образом, в квантовой физике состояние физической системы описывается вектором абстрактного гильбертова пространства \mathcal{H} , обладающего описанными выше свойствами. При этом если два или более произвольных вектора $|\phi\rangle$ и $|\psi\rangle$ принадлежат \mathcal{H} , то любая их линейная комбинация принадлежит тому же гильбертову пространству \mathcal{H} . Причем, $|\phi\rangle$ описывает то же состояние, что и $c|\phi\rangle$. Даже задание нормы вектора $\langle \phi | \phi \rangle$ оставляет неопределенность, связанную с произвольным выбором фазового множителя $c = e^{i\theta}$.

В квантовой теории кет-векторами могут быть различные математические объекты, удовлетворяющие условиям (1.1)–(1.10). Например, это могут быть вектор-столбцы, задаваемые в виде

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \langle \phi| = (c_1^* \quad c_2^* \quad c_3^* \quad \dots), \quad (1.11)$$

В этом случае базисными векторами являются вектор-столбцы

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (1.12)$$

В квантовой механике векторами $|\Psi\rangle$ гильбертова пространства \mathcal{H} являются также волновые функции $\Psi(x)$, представляющие собой математически однозначные, непрерывные и квадратично-интегрируемые комплексно-значные функции. В таком случае разложение (1.2) для непрерывного базиса представляет собой разложение функции $\Psi(x)$ в обобщенный ряд Фурье, так что

$$\Psi(x) = \int c(k) \varphi(k, x) dk, \quad (1.13)$$

где коэффициенты разложения есть

$$c(k) = \int \varphi^*(k, x) \Psi(x) dx. \quad (1.14)$$

Как известно, волновая функция $\Psi(x)$, заданная в координатном представлении, в квантовой теории имеет вероятностную интерпретацию: $|\Psi(x)|^2 dx$ есть плотность вероятности того, что квантовая система локализована на бесконечно малом отрезке dx . При этом коэффициенты разложения $c(k)$ в (1.14) представляют соответствующие вероятности, но уже про-

пространстве волновых векторов (импульсов) квантовой системы. Заметим, что квадрат нормы вектора

$$\|\Psi\|^2 = \int |\Psi(x)|^2 dx = \int |c(k)|^2 dk = 1 \quad (1.15)$$

есть не что иное, как полная вероятность, принятая за единицу. Интегрирование в (1.15) производится по некоторому объёму V , в котором точно находится квантовая система (например, частица). В общем случае V может быть и бесконечно большим, но тогда следует потребовать, чтобы при $x \rightarrow \pm\infty$, $\Psi(x) \rightarrow 0$.

Таким образом, физический смысл коэффициентов c_n становится также понятным: $|c_n|^2$ есть вероятности обнаружения квантовой системы в базисных состояниях $|n\rangle$, где n пробегает целочисленный ряд значений $n = 1, 2, \dots$ в ходе ее измерения.

Важным физическим примером из квантовой теории информации является состояние кубита $|\phi\rangle$, которое можно записать в виде

$$|\phi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle, \quad (1.16)$$

где $|0\rangle$ и $|1\rangle$ определяют взаимортогональные состояния логического нуля и единицы некоторой физической системы в двухмерном гильбертовом пространстве; $|c_0|^2$ и $|c_1|^2 = 1 - |c_0|^2$ – это соответствующие вероятности обнаружения кубита в этих состояниях при измерении.

Тензорное произведение. В квантовой теории особое значение играют так называемые тензорные произведения. Например, для двух пространств L и M с базисными векторами (e_1, e_2, \dots, e_n) и (f_1, f_2, \dots, f_m) , оно определяется как пространство размерности nm с базисом из элементов $e_s \otimes f_k$. При этом скалярное произведение в гильбертовом пространстве согласовано с тензорным произведением:

$$(\langle\varphi_1| \otimes \langle\varphi_2|)(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = \langle\varphi_1|\psi_1\rangle\langle\varphi_2|\psi_2\rangle. \quad (1.17)$$

1.2. Операторы физических величин в гильбертовом пространстве

Операторы в гильбертовом пространстве. В квантовой теории измеряемым (наблюдаемым) величинам сопоставляются эрмитовы операторы. Оператор – это правило, по которому вектору $|\varphi\rangle$ из гильбертова пространства ставится во взаимно однозначное соответствие некоторый вектор $|\psi\rangle$ из того же пространства, что формально может быть записано в виде

$$|\psi\rangle = \hat{A}|\varphi\rangle. \quad (1.18)$$

В квантовой теории особый смысл имеют линейные операторы, для которых

$$\hat{A}(c_1|\varphi\rangle + c_2|\psi\rangle) = c_1\hat{A}|\varphi\rangle + c_2\hat{A}|\psi\rangle. \quad (1.19)$$

Оператор \hat{M} есть произведение операторов \hat{A} и \hat{B} , $\hat{M} = \hat{A}\hat{B}$, если

$$\hat{M}|\varphi\rangle = \hat{A}\hat{B}|\varphi\rangle = \hat{A}(\hat{B}|\varphi\rangle). \quad (1.20)$$

Коммутационным соотношением, или коммутатором двух операторов \hat{A} и \hat{B} называют оператор

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (1.21)$$

Произведение операторов в общем случае не коммутативно. Пусть, например,

$$\hat{A}\hat{B}|\varphi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle = |v\rangle \text{ и } \hat{B}\hat{A}|\varphi\rangle = \hat{B}|u\rangle = |v'\rangle, \quad (1.22)$$

тогда в общем случае $|v\rangle \neq |v'\rangle$.

Коммутаторы операторов удовлетворяют следующим простым алгебраическим тождествам:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad & [\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]; \\ \text{(б)} \quad & [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]; \\ \text{(в)} \quad & [\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Последнее из них есть тождество Якоби.

Заметим, что если $|v\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$, то скалярное произведение $\langle\varphi|v\rangle$ запишется в виде $\langle\varphi|v\rangle = \langle\varphi|\hat{A}|\psi\rangle$. Эту запись можно толковать двояко: либо как скалярное произведение бра-вектора $\langle\varphi|$ на кет-вектор $\hat{A}|\psi\rangle$, либо как скалярное произведение бра-вектора $\langle\varphi|\hat{A}$ на кет-вектор $|\psi\rangle$. Так появляется сопряженный оператор \hat{A}^\dagger : по определению, $\langle\hat{A}^\dagger\psi|$ (бра-вектор, соответствующий кет-вектору $\hat{A}^\dagger|\psi\rangle$) равен линейному функционалу $\langle\psi|\hat{A}$. Из определения следует, что

$$\langle\hat{A}^\dagger\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle. \quad (1.24)$$

Оператор \hat{A}^\dagger называется эрмитово сопряженным оператору \hat{A} , если

$$\langle\varphi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = (\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle)^*. \quad (1.25)$$

Для самосопряженных или эрмитовых операторов выполняется условие $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

С математической точки зрения операторы физических величин описываются матрицами. Например, оператор энергии \hat{H} , гамильтониан, представляет собой эрмитову матрицу

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1D} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{D1} & H_{D2} & \dots & H_{DD} \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

где $H_{mn} = \langle m|\hat{H}|n\rangle$, ($m, n = 1, \dots, D$) есть матричные элементы оператора \hat{H} , удовлетворяющие условиям эрмитовости:

$$H_{mn} = H_{nm}^*. \quad (1.27)$$

Оператор в гильбертовом пространстве называется унитарным, если он сохраняет скалярное произведение векторов. Из выражения $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\hat{U}\varphi|\hat{U}|\psi\rangle = \langle\varphi|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi\rangle$ следует, что

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{I}. \quad (1.28)$$

Приведём основные свойства эрмитовых и унитарных операторов.

1. Собственные значения унитарного оператора по модулю равны единице.

2. Пусть $|\varphi\rangle$ и $|\psi\rangle$ – собственные векторы произвольного оператора \hat{A} , соответствующие его разным собственным значениям. Если оператор \hat{A} эрмитов и унитарен, то состояние $|\varphi\rangle$ и $|\psi\rangle$ взаимно ортогональны.

3. Если оператор \hat{A} эрмитов, то оператор $e^{i\hat{A}}$ унитарен.

Читателю предоставляется возможность самостоятельно доказать эти свойства.

Определим также тензорное произведение операторов. Оно действует в тензорном произведении пространств, на которых действуют операторы, по правилу:

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})|a\rangle \otimes |b\rangle = \hat{A}|a\rangle \otimes \hat{B}|b\rangle. \quad (1.29)$$

1.3. Задача на собственные функции (с.ф.) и собственные значения (с.з.)

Пусть \hat{A} – линейный оператор, $|n\rangle$ – вектор гильбертова пространства, α_n – комплексное число. Задача заключается в том, чтобы найти все векторы $|n\rangle$ и числа α_n , обращающие уравнение

$$\hat{A}|n\rangle = \alpha_n|n\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, D \quad (1.30)$$

в тождество. Векторы $|n\rangle$ и числа α_n , обращающие уравнение (1.30) в тождество, называются собственными векторами (или состояниями) и собственными значениями оператора \hat{A} . Набор собственных значений $\{\alpha_n\}$ образует *спектр* оператора \hat{A} . Число D определяет размерность гильбертова пространства.

В случае непрерывного спектра задача на собственные значения имеет вид:

$$\hat{A}|k\rangle = k|k\rangle, \quad (1.31)$$

где собственное значение k есть непрерывная переменная.

Может случиться, что одному и тому же собственному значению α_j соответствует несколько линейно независимых друг от друга собственных состояний. Тогда говорят, что данное с.з. является *вырожденным*. Максимальное число линейно независимых состояний, принадлежащих этому собственному значению, называется *кратностью вырождения*. В квантовой физике вырождение собственных значений для оператора некоторой наблюдаемой величины связано с физической симметрией задачи, когда имеется два (или более) коммутирующих между собой оператора наблюдаемых величин. Можно показать, что в этом случае коммутирующие операторы имеют общую систему собственных векторов.

Ключевым (для физики) свойством эрмитовых операторов является, то что их собственные значения вещественны, а собственные векторы ортогональны и образуют базис в гильбертовом пространстве. В таком случае наблюдаемым физическим величинам системы (энергия, импульс, координата, момент импульса, и т.д.) сопоставляются эрмитовы операторы.

Задачу на с.ф. и с.з. для наблюдаемой величины A в квантовой физике обычно связывают с процессом измерения. А именно, величине A соответствует эрмитов оператор \hat{A} . Единственно возможными результатами измерения переменной A являются собственные значения оператора \hat{A} . При этом, если система изначально находилась в квантовом состоянии $|\psi\rangle$, то $W_n = |\langle n|\psi\rangle|^2$ ($n = 0, 1, \dots, D$) определяет вероятность того, что результатом эксперимента окажется значение величины A , равное α_n . При этом сразу после измерения система перейдет в собственное состояние $|n\rangle$. Если наблюдаемая A имеет непрерывный спектр собственных значений, тогда $W(k) = |\langle k|\psi\rangle|^2$ представляет собой плотность вероятности того, что в эксперименте окажется значение $A = k$. Здесь мы не рассматриваем случай вырожденных собственных состояний системы.

Среди операторов, используемых в квантовой теории, существует *единичный* оператор, определяемый как:

$$\hat{I}|\psi\rangle = |\psi\rangle. \quad (1.32)$$

Если собственные кет-векторы $|n\rangle$ наблюдаемой величины A образуют полную ортонормированную систему, то в случае дискретного спектра имеем следующее разложение единичного оператора:

$$\hat{I} = \sum_i |i\rangle\langle i|. \quad (1.33)$$

Аналогично для непрерывного спектра имеем

$$\hat{I} = \int dk |k\rangle\langle k|. \quad (1.34)$$

Легко убедиться, что

$$\hat{I}|\varphi\rangle = \sum_j |j\rangle\langle j|\varphi\rangle = \sum_j \varphi_j |j\rangle = |\varphi\rangle, \quad (1.35)$$

$$\hat{I}|\varphi\rangle = \int dk |k\rangle\langle k|\varphi\rangle = \int c(k) |k\rangle dk = |\varphi\rangle. \quad (1.36)$$

1.4. Статистические свойства наблюдаемых

Если квантовая система находилась до измерения в состоянии $|\psi\rangle$, то значение наблюдаемой A , полученное при её измерении в этом состоянии, является случайной величиной с законом распределения вероятностей W_i , причем собственное значение α теперь понимается как значение наблюдаемой A . Среднее для данного распределения, т.е. значение, полученное

при усреднении по большому числу измерений, произведенных над идентичными системами, приготовленными в одном и том же состоянии, называется *ожидаемым* или *средним значением* наблюдаемой A и обозначается $\langle A \rangle$. В квантовой теории оно определяется в виде среднего значения оператора \hat{A} в состоянии $|\psi\rangle$ уравнением

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (1.37)$$

Стандартное отклонение, являющееся мерой разброса результатов измерения, называется неопределенностью (флуктуацией) наблюдаемой A и обозначается как $\Delta \hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$. Поскольку значения флуктуаций $\Delta \hat{A}$ могут быть как положительными, так и отрицательными, то имеет смысл рассмотреть квадрат этой величины. Точнее говоря, квантовую неопределенность наблюдаемой A удобно характеризовать дисперсией наблюдаемой величины A , рассчитанной в квантовом состоянии $|\psi\rangle$ системы до измерения, и определяемой как:

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle = \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^2. \quad (1.38)$$

Легко показать, что если $|\psi\rangle$ есть собственный вектор оператора \hat{A} , то дисперсия $\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle = 0$.

Совместность наблюдаемых. В отличие от классической физики, в квантовой механике, оптике и теории информации одновременное измерение двух и более величин вызывает определенные трудности с интерпретацией и пониманием даже в теории. Здесь мы остановимся на математически доказуемых утверждениях, связанных с процессом измерения двух (и более) величин. Две наблюдаемые (обозначим их как A и B) называются совместными, если измерение одной из них не влияет на результат измерения другой. Например, можно измерять сначала A , затем B и потом снова A . Для совместных величин повторное измерение наблюдаемой A даст в точности тот же результат, что и первое измерение. В противном случае наблюдаемые A и B являются несовместными.

В квантовой теории имеется относительно простой «алгоритм» выявления совместных наблюдаемых. А именно, наблюдаемые A и B совместны тогда и только тогда, когда соответствующие им операторы \hat{A} и \hat{B} коммутируют между собой. В более общем случае справедливым оказывается неравенство, которому удовлетворяют дисперсии наблюдаемых, и которое в квантовой физике называется соотношением неопределенностей Гейзенберга. В частности, для любого состояния системы $|\psi\rangle$ справедливо неравенство:

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |[\hat{A}, \hat{B}]|^2, \quad (1.39)$$

где $\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$ и $\langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle = \langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2$ есть дисперсии измеряемых величин.

В квантовой оптике величинам A и B могут соответствовать разные переменные: как дискретные, так и непрерывные, характеризующие квантованное электромагнитное поле. Об этом речь пойдет в следующих главах.

1.5. Смешанные состояния; оператор плотности

Сделаем одно существенное замечание относительно границ применимости излагаемой выше теории. Она справедлива для квантовых систем, находящихся в так называемых чистых состояниях, характеризующихся определенными квантовыми состояниями. Однако возможны также случаи, когда физической системе нельзя однозначно сопоставить какой-либо вектор состояния. В этом случае физическая система должна быть охарактеризована с помощью статистического оператора (матрицы плотности), играющего основополагающую роль при описании большинства физических процессов взаимодействия рассматриваемой квантовой системы с окружающей средой – резервуаром.

Статистический ансамбль – это большая совокупность физически идентичных квантовых систем, которые могут описываться разными состояниями. Когда все состояния идентичны, ансамбль называется чистым (pure), в противном случае – смешанным (mixed). В статистическом ансамбле каждое состояние $|\psi_i\rangle$ присутствует с некоторой вероятностью P_i , где $\sum_i P_i = 1$ и $\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$. Чистое состояние – это частный случай смеси, когда реализуется только одно состояние с вероятностью $P_i = 1$.

Для квантовой системы в чистом состоянии среднее значение определяется формулой (1.37). Для статистической смеси она преобразуется в выражение

$$\langle A \rangle = \sum_i P_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle. \quad (1.40)$$

Смешанный ансамбль может быть описан статистическим оператором $\hat{\rho}$, известным как матрица плотности, который позволяет вычислять средние (1.40). Этот оператор задается формулой

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.41)$$

Тогда среднее значение наблюдаемой вычисляется как

$$\langle A \rangle_\rho = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}). \quad (1.42)$$

Здесь $\text{Tr}(\hat{B})$ обозначает след оператора, который в любом ортонормированном базисе можно вычислить как $\text{Tr}(\hat{B}) = \sum_n \langle n | \hat{B} | n \rangle = \sum_n B_{nn}$.

Нормировка состояний приводит к свойству $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$. При этом матрица плотности эрмитова и положительно определена. Это означает, что в своем собственном представлении $\hat{\rho} = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|$ все собственные значения неотрицательны, $p_n > 0$, а их сумма также равна единице, $\sum_n p_n = 1$.

Ненулевые собственные значения p_n идентичны значениям P_i только в том случае, если состояния $|\psi_i\rangle$, используемые для определения ансамбля, ортогональны друг другу.

Для чистого ансамбля $p_n = 1$ для одного состояния, а для всех остальных $p_m = 0$ ($m \neq n$). В этом случае $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n| = \hat{E}_n$ является проективным оператором и, следовательно, удовлетворяет условию $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$. Отсюда следует, что для чистого состояния $\text{Tr}\hat{\rho}^2 = 1$. Однако для смешанного состояния $\text{Tr}\hat{\rho}^2 = \sum_n p_n^2 < 1$. Величина $\wp = \text{Tr}\hat{\rho}^2$ может рассматриваться как мера чистоты ансамбля (purity), поскольку позволяет отличить чистое состояние от смешанного. Максимально смешанное состояние описывается матрицей плотности $\hat{\rho} = \frac{1}{N} \hat{I}$ (где N – размерность гильбертова пространства) и имеет чистоту $\wp = 1/N$. Например, для двухуровневой системы максимально смешанное состояние описывается матрицей плотности $\hat{\rho} = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$.

1.6. Динамические свойства квантовых систем

1.6.1. Представление Шредингера

До настоящего момента предполагалось, что основные характеристики квантовой системы (наблюдаемые величины, кет-вектор состояния) не зависят от времени. Однако в реальности это не так. Все физические процессы протекают во времени и пространстве. В квантовой теории принято рассматривать два подхода к описанию физических величин во времени. Подход Шредингера основан на том, что от времени зависит только квантовое состояние системы $|\psi(t)\rangle$, а операторы измеряемых величин от времени не зависят. В таком случае вектор состояния подчиняется уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (1.43)$$

где оператор \hat{H} – гамильтониан рассматриваемой системы, соответствующий её полной энергии.

В квантовой физике особое значение имеет случай, когда гамильтониан от времени явно не зависит. В этом пределе система консервативна и уравнение (1.43) можно формально проинтегрировать, записав решение в виде

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (1.44)$$

где оператор

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i\hat{H}(t - t_0)}{\hbar} \right] \quad (1.45)$$

принято называть оператором эволюции физической системы, а вектор $|\psi(t_0)\rangle$ представляет состояние системы в начальный момент времени t_0 . Из (1.45) следует, что оператор \hat{U} удовлетворяет следующему уравнению:

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} = \hat{H}\hat{U}. \quad (1.46)$$

Согласно же равенству (1.44) оператор \hat{U} должен удовлетворять следующему начальному условию:

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I}. \quad (1.47)$$

Так как оператор \hat{H} эрмитов, то из выражения (1.45) следует, что имеет место соотношение

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \exp\left[\frac{i\hat{H}(t - t_0)}{\hbar}\right] = \hat{U}^{-1}(t, t_0), \quad (1.48)$$

которое показывает, что оператор \hat{U} является и унитарным оператором. Следовательно, можно утверждать, что состояние системы в момент времени t получается из состояния системы в момент времени t_0 с помощью некоторого унитарного преобразования. Поскольку $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$, то норма вектора $|\psi(t)\rangle$ сохраняется во времени, т.е.

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)\hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle. \quad (1.49)$$

Если же система не консервативна, то в этом случае оператор \hat{U} не является унитарным.

Если система в момент времени t_0 находится в состоянии $|\psi(t_0)\rangle$, то в силу (1.44) состояние этой системы в момент времени t определяется вектором $|\psi_s(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$. Вероятность того, что в некоторый момент времени t_1 система будет находиться в некотором состоянии $|\varphi\rangle$, равна

$$|\langle\varphi|\psi_s(t_1)\rangle|^2 = |\langle\varphi|U(t_1, t_0)|\psi(t_0)\rangle|^2. \quad (1.50)$$

Это описание, в котором базисные векторы стационарны, а вектор динамического состояния системы $|\psi_s(t)\rangle$ «движется» с течением времени в кет-пространстве, называется шредингеровским представлением квантовой механики.

1.6.2. Представление Гейзенберга

При этом подходе кет-векторы наблюдаемых величин фиксированы во времени, а операторы наблюдаемой величины A зависят от времени и подчиняются операторному уравнению

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}] + i\hbar \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}, \quad (1.51)$$

где \hat{H} – гамильтониан в представлении Гейзенберга.

Уравнение (1.51) называется уравнением *движения Гейзенберга* для наблюдаемой величины A . В практически важных случаях операторы от

времени явно не зависят, так что (1.51) приобретает более привычный (для расчетов) вид

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}]. \quad (1.52)$$

Если оператор \hat{A} коммутирует с гамильтонианом, тогда

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = 0. \quad (1.53)$$

В этом случае величина A называется *интегралом движения*, т.е. сохраняется во времени. В качестве примера рассмотрим уравнение (1.51) в случае, когда $A = H$. Если \hat{H} от времени явно не зависит, то $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$ и из (1.51) получаем, что

$$\frac{d\hat{H}}{dt} = 0, \quad (1.54)$$

т.е. получаем, что система является консервативной.

Заметим, что временная эволюция матрицы плотности следует из уравнения Шредингера и определяется выражением

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}, \hat{H}]. \quad (1.55)$$

Общее решение можно записать в виде $\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0)$, где \hat{U} – унитарный оператор временной эволюции, определенный выше.

В квантовой теории доказывалось, что представление Шредингера и Гейзенберга являются математически полностью эквивалентными. Это имеет место, если кет-векторы состояний системы в этих двух представлениях связаны между собой соотношением:

$$|\psi_S(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi_H(t_0)\rangle, \quad (1.56)$$

где индексы «H» и «S» означают, что кет-векторы рассматриваются в представлении Гейзенберга или Шредингера, соответственно. Таким образом, вектор $|\psi_H(t_0)\rangle$ стационарный, а вектор $|\psi_S(t)\rangle$ является переменным вектором. Так как

$$\hat{U}(t_0, t_0) = 1, \quad (1.57)$$

то в начальный момент времени $t = t_0$ кет-векторы состояний в обоих представлениях совпадают друг с другом.

Используя уравнение (1.56), а также комплексно-сопряженное ему, можно вывести правило расчета средних величин для оператора \hat{A}_S в виде:

$$\langle A \rangle = \langle \psi_S(t) | \hat{A}_S | \psi_S(t) \rangle = \langle \psi_H(t_0) | \hat{U}^\dagger \hat{A}_S \hat{U} | \psi_H(t_0) \rangle. \quad (1.58)$$

Поскольку наблюдаемое значение средней величины не должно зависеть от способа математического описания, связь между операторами наблюдаемых величин в представлениях Гейзенберга и Шредингера имеет вид

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}(t, t_0), \quad (1.59)$$

где оператор $\hat{U}(t, t_0)$ определяется соотношением (1.45). Так как $[\hat{H}_S, \hat{U}] = 0$, то в силу определения (1.52) $\hat{H}_H = \hat{H}_S$.

Важно заметить, что эквивалентность подходов Шредингера и Гейзенберга при расчетах средних величин и дисперсий носит формальный характер. В реальных ситуациях приходится иметь дело с приближенными методами решения уравнения Шредингера, или уравнения Гейзенберга. Эти методы и подходы вовсе не обязаны быть эквивалентными, и обусловлены только спецификой задачи, свойствами симметрии, и т.д. Какое представление для решения задачи следует выбрать в каждой данной физической ситуации – остается правом выбора исследователя и зависит как от постановки задачи, так и конкретных условий ее решения. Здесь нет «единых» алгоритмов и рекомендаций; исследователи ориентируются главным образом, на свой опыт и навыки. Заметим, что возникающая при различных подходах «неоднозначность» результатов традиционно сопутствует квантовой теории с момента ее становления и является, по сути, источником парадоксов и различных философских интерпретаций, которые в данном пособии НЕ обсуждаются, но могут быть найдены в монографии [2].

1.7. Задачи

1. Докажите (1.9).
2. Какой явный вид и физический смысл в квантовой механике имеют функции $\varphi(k, x)$ разложения Фурье в (1.13)?
3. Докажите, что внутреннее произведение векторов $|\phi\rangle\langle\phi|$ есть оператор, а не число. В качестве примера найдите его явный вид для состояния кубита (1.16).
4. В квантовой теории проекционным оператором \hat{P}_φ на вектор $|\varphi\rangle$ называют оператор

$$\hat{P}_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|. \quad (1.60)$$

- а) Найти, как действует оператор \hat{P}_φ на произвольное состояние $|\psi\rangle$.
- б) Доказать, что $\hat{P}_\varphi^2 = \hat{P}_\varphi$.
- в) Доказать, что вероятность $W_i = |\langle i|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|\hat{P}_i|\psi\rangle$ можно представить с помощью оператора $\hat{P}_i = \sum_i |i\rangle\langle i|$ ортогональной проекции на подпространство собственных векторов оператора \hat{A} , для которого $\hat{P}_i|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\psi\rangle$.
5. Доказать, что если два оператора коммутируют, тогда систему собственных векторов этих операторов можно выбрать общей.
6. Исходя из определения (1.22) приведите примеры коммутирующих, а также не коммутирующих между собой двух операторов.
7. Пусть даны три оператора \hat{A}, \hat{B} и \hat{C} , такие что $[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{C}] = 0$, но $[\hat{B}, \hat{C}] \neq 0$. Покажите, что тогда спектр оператора \hat{A} по необходимости вырожден.

8. Докажите, что выражение (1.37) может быть рассчитано следующим образом

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i W_i \alpha_i = \sum_i |\langle i | \psi \rangle|^2 \alpha_i \quad (1.61)$$

9. Докажите, что оператор импульса $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ квантовой частицы эрмитов.

10. Даны матрицы Паули, описывающие частицы со спином $\frac{1}{2}$:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

а) Найти коммутационные соотношения между ними.

б) Доказать, что $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = \sigma_0^2 = 1$.

в) Найти собственные вектора матриц Паули.

11. Докажите, что если \hat{A} – эрмитов оператор, то его собственные значения вещественны.

12. Если \hat{A} оператор неэрмитов, то может ли он обладать вещественными собственными значениями? Приведите, по возможности, примеры.

13. Пусть f – некоторая аналитическая функция, то есть функция, представимая в виде степенного ряда,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad (1.63)$$

а \hat{z} – некоторый оператор. Тогда оператор \hat{F} , имеющий вид

$$\hat{F} = f(\hat{z}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \hat{z}^k, \quad (1.64)$$

называют (операторно-значной) функцией от оператора \hat{z} .

Рассмотрим оператор $\hat{T}_a \equiv \exp\left(a \frac{d}{dx}\right)$, являющийся функцией от оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$, $a = \text{const}$. Как такой оператор действует на волновую функцию $\psi(x)$?

14. Докажите формулу Бейкера–Хаусдорфа для любых двух операторов \hat{A} и \hat{B} :

$$e^{i\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{-i\lambda \hat{A}} = \hat{B} + i\lambda [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (1.65)$$

15. Для двух операторов \hat{A} и \hat{B} , удовлетворяющих условиям $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]]$ и $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, докажите теорему Бейкера–Хаусдорфа–Кэмпбелла

$$e^{\hat{A} + \hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} e^{\hat{B}} e^{\hat{A}}. \quad (1.66)$$

16. Рассмотреть однокубитное состояние $|\phi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$, см. (1.16), и найти матричные элементы оператора плотности $\hat{\rho} = |\phi\rangle\langle\phi|$. Является ли такое состояние чистым? Ответ обосновать.

17. Рассмотрим двухкубитное состояние

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle, \quad (1.67)$$

где $|\psi_{1,2}\rangle$ определяются как:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle; \quad (1.68)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle). \quad (1.69)$$

- а) Докажите, что состояние $|\Psi\rangle$ нормировано на единицу.
- б) Запишите состояние $|\Psi\rangle$ в матричной форме.
- в) Какова вероятность обнаружить двухкубитное состояние $|\Psi\rangle$ в основном состоянии $|0\rangle \otimes |0\rangle$?

2. КВАНТОВАНИЕ СВОБОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

2.1. Вторичное квантование

Проблема квантования свободного электромагнитного поля является ключевой задачей, с которой начинается изучение квантовой электродинамики, а также квантовой оптики, и всех связанных с ними дисциплин. Строгая процедура квантования, принятая в квантовой электродинамике и основанная на вектор-потенциале электромагнитного (э.м.) поля, безусловно, наиболее последовательна [3]. Она обладает Лоренц-инвариантной формой, но весьма громоздка и далека от практических приложений. Здесь мы рассматриваем только «алгоритм» квантования, имеющий важное значение в различных приложениях и схемах квантовой оптики и квантовой информации. Преимущество такого подхода заключается в его универсальности, поскольку он позволяет при определенных условиях рассмотреть статистически родственные фотонам системы бозонов, каковыми являются фононы, экситон-поляритоны, куперовские пары, и т.д.

Цель такого практического квантования э.м. поля – найти переменные, описывающие квантовые свойства этого поля. Заметим, что квантовомеханический импульс $p \equiv p_x$ и сопряженная с ним координата x (для простоты ограничимся одномерным случаем) напрямую не подходят для процедуры квантования э.м. поля, как это происходит в квантовой механике. Фотон, свободно распространяющийся в вакууме со скоростью света c , как квантовая частица обладает определенным импульсом (волновой вектор \mathbf{k}), но не имеет определенного положения в пространстве, что связано с его релятивистскими свойствами. Таким образом, для э.м. поля предстоит найти переменные, являющиеся аналогами импульса и координаты в квантовой механике, но измеряемые экспериментально в оптике. Подходящей для квантования моделью является классический гармонический осциллятор (рис. 2.1). Далее будут рассмотрены характеристики одномерного гармонического осциллятора.

Рассмотрим линейно поляризованное вдоль оси X э.м. поле в пустом резонаторе кубической формы объемом $V = L^3$, как показано на рис. 2.1. Фактически, такое излучение представляет собой стоячую волну с узлами в $Z = 0$ и $Z = L$. Заметим, что в процедуре квантования предполагается, что L достаточно велико.

Описание э.м. поля в резонаторе основано на сопоставлении его мод характеристикам классического гармонического осциллятора. В рассматриваемом случае предполагается, что энергия гармонического осциллятора E_{cl} эквивалентна энергии поля E_F в резонаторе. В результате можно получить соотношение между импульсом осциллятора p , положением x и амплитудой \mathcal{E} классического э.м. поля, как показано на рис. 2.1.

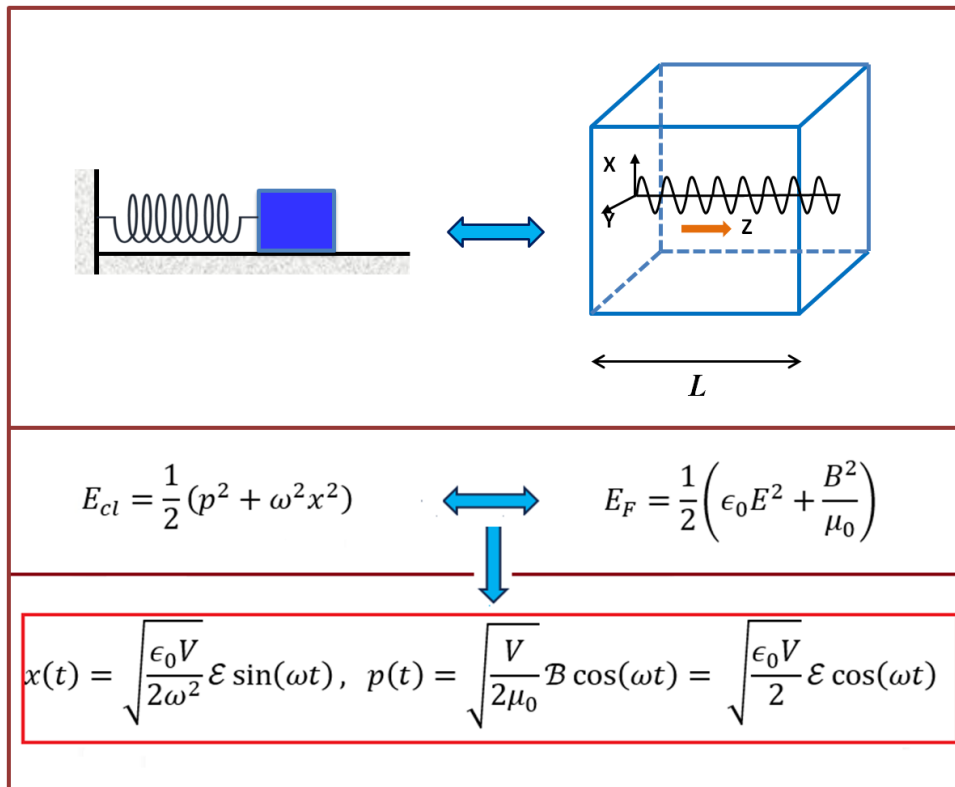


Рис. 2.1. Схема квантования свободного э.м. поля в резонаторе объема $V = L^3$, основанная на сопоставлении его энергии E_F и энергии E_{cl} (абстрактного) гармонического осциллятора с массой $m = 1$ (вторая строка). Э.м. поле представляет собой в пространстве стоячую волну с угловой частотой ω , величина электрической и магнитной составляющих которой изменяются во времени как $E = \mathcal{E} \sin[kZ] \sin[\omega t]$ и $B = \mathcal{B} \cos[kZ] \cos[\omega t]$, что есть решения соответствующих уравнений Максвелла; ϵ_0 и μ_0 – электрическая и магнитная проницаемости вакуума, соответственно. Третья строка устанавливает формальную связь между импульсом p и координатой x осциллятора с соответствующими переменными э.м. поля: амплитудами электрического (\mathcal{E}) и магнитного ($\mathcal{B} = \mathcal{E}/c$) полей

Квантование э.м. поля предполагает переход от классических характеристик гармонического осциллятора и соответствующей ему моды поля к квантовым, что в теории носит название вторичного квантования (рис. 2.1).

Начнем с процедуры вторичного квантования переменных, описывающих квантовый гармонический осциллятор. В квантовой механике его операторы импульса \hat{p} и координаты \hat{x} являются эрмитовыми и удовлетворяют каноническому коммутационному соотношению:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar. \quad (2.1)$$

В результате, координата и импульс осциллятора подчиняются соотношению неопределенностей Гейзенберга:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2.2)$$

где $\sigma_x^2 \equiv \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2$ и $\sigma_p^2 \equiv \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2$ – дисперсии наблюдаемых координаты и импульса, соответственно.

Полная энергия гармонического осциллятора может быть вычислена при решении задачи по поиску собственных состояний и собственных значений гамильтониана квантового гармонического осциллятора:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}. \quad (2.3)$$

Далее для простоты будем считать, что масса осциллятора $m = 1$.

Из квантовой теории известно, что гамильтониан (2.3) имеет дискретный спектр энергии E_n (см., например, [4]):

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad (2.4)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ – главное квантовое число. Собственные состояния гамильтониана (2.3) связаны с полиномами Эрмита.

Энергетические уровни (обозначены справа) и соответствующие квантовые состояния (обозначены слева) осциллятора показаны на рис. 2.2. Стоит отметить, что основное состояние квантового осциллятора с $n = 0$ обладает некоторой ненулевой энергией и характеризуется гауссовой волновой функцией.

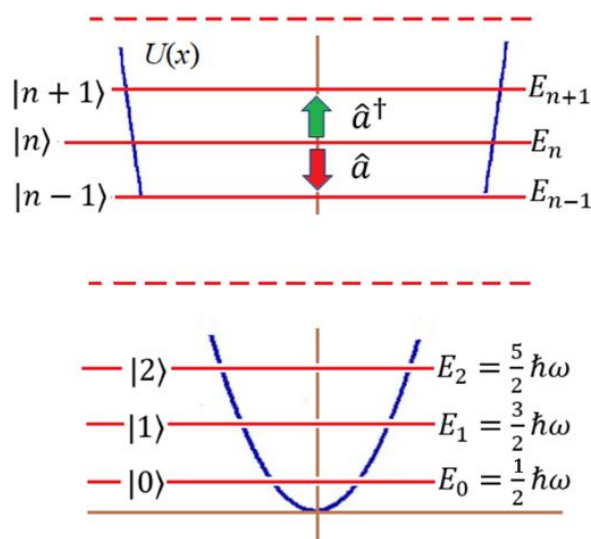


Рис. 2.2. Эквидистантные уровни энергии квантового гармонического осциллятора с угловой частотой ω . Операторы уничтожения, \hat{a} , и рождения, \hat{a}^\dagger , отнимают или прибавляют к любому состоянию $|n\rangle$ один квант энергии $\hbar\omega$, соответственно

В формализме вторичного квантования определим новые переменные \hat{a} и \hat{a}^\dagger , формально соответствующие операторам \hat{x} и \hat{p} , линейным преобразованием [5]:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{x} + i\hat{p}); \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{x} - i\hat{p}). \quad (2.5)$$

В квантовой теории операторы, определенные в (2.5), называются операторами **уничтожения**, \hat{a} , и **рождения**, \hat{a}^\dagger , соответственно. Эти операторы **не эрмитовы** и удовлетворяют следующему коммутационному соотношению, справедливому для частиц со статистикой Бозе-Эйнштейна:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \equiv \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1. \quad (2.6)$$

Из (2.5) можно получить обратные преобразования:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger); \quad \hat{p} = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.3) получим гамильтониан \hat{H} квантового гармонического осциллятора в формализме вторичного квантования:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.8)$$

Оператор

$$\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (2.9)$$

называется оператором числа частиц.

Энергетический спектр E_n (2.4) представляет собой собственные энергии гамильтониана \hat{H} , описанного в (2.8), если рассматривать **фоковские состояния** $|n\rangle$, которые определяются следующими правилами:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle, \\ \text{(б)} \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Фоковские состояния образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве, см. (1.3).

Здесь и далее используются обозначения Дирака, являющиеся универсальным математическим аппаратом алгебры Гильбертова пространства для представления квантовых состояний, подробнее об этом можно посмотреть, например, в [6].

Таким образом, из уравнений (2.10) следует, что оператор уничтожения, \hat{a} , вычитает один квант энергии, а оператор рождения, \hat{a}^\dagger , добавляет один квант (рис. 2.2).

Фоковские состояния, удовлетворяющие соотношению (1.3)(а), можно представить в виде тех же вектор-столбцов, см. (1.12).

Подобным образом можно представить операторы уничтожения (\hat{a}) и рождения (\hat{a}^\dagger), описанные в (2.10), в матричной форме:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}; \quad (2.11)$$

$$\hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Из уравнений (2.11) и (2.12) видно, что и оператор уничтожения, и оператор рождения квантов имеют в фоковском базисе недиагональную форму.

Важным предельным случаем выражения (2.10), требующим дополнительного определения, является вакуумное состояние $|0\rangle$, соответствующее основному состоянию гармонического осциллятора с $n = 0$. Его можно описать как

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.13)$$

Из (2.10) сразу следует, что $|n\rangle$ – собственное состояние оператора числа частиц \hat{n} , т.е.

$$\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger \sqrt{n} |n-1\rangle = \sqrt{n} \hat{a}^\dagger |n-1\rangle = n|n\rangle. \quad (2.14)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что среднее значение

$$n = \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle \quad (2.15)$$

представляет собой среднее число частиц. В этом случае из (2.8) можно получить:

$$\langle n | \hat{H} | n \rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad (2.16)$$

что идентично фундаментальному результату (2.4), полученному для энергии квантового гармонического осциллятора.

Таким образом, для определения свойств квантового гармонического осциллятора теперь вместо импульса и координаты можно использовать операторы, определенные в уравнениях (2.5), и состояния, описанные в (2.10) и (2.13).

2.2. Свойства квантованного электромагнитного поля

2.2.1. Операторы поля

Рассмотрим квантование э.м. поля в резонаторе объема V . Процедура квантования предполагает введение операторов уничтожения \hat{a} и рождения \hat{a}^\dagger фотонов вместо использования классических (комплексных) амплитуд поля \mathcal{E} и \mathcal{E}^* [5]. В этом случае квантовая теория предлагает использовать одномодовый оператор поля $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ в плосковолновом приближении, который может быть представлен как (ср. с [7])

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= i \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_x \left[\hat{a} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} \right] \equiv \\ &\equiv \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где обозначено $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_x \hat{a} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$, $\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = (\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t))^\dagger$; V – объем квантования, \mathbf{e}_x – единичный вектор поляризации. В уравнении (2.17) $\sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}}$ – постоянная, которую можно получить, если учесть гамильтониан поля из (2.8) и соответствующую энергию фотонов из уравнения (2.4).

Используя квантовую теорию (см., например, [5]), также можно показать, что оператор электрического поля $\hat{\mathbf{E}}$ в более общем (многомодовом) случае имеет следующий вид:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}s} \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} [\hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)}], \quad (2.18)$$

где $\mathbf{e}_{\mathbf{k}s}$ – вектор поляризации. Операторы $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger$ в (2.18) обозначают уничтожение и рождение фотона с волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией $\mathbf{e}_{\mathbf{k}s}$, соответственно. В то же время оператор магнитного поля $\hat{\mathbf{B}}$ можно записать как:

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}s} (\mathbf{K} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} [\hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)}], \quad (2.19)$$

где $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$.

Строго говоря, полевые операторы, определенные в (2.18) и (2.19), могут быть получены из решений уравнений Максвелла в виде векторного потенциала [3].

Операторы уничтожения и рождения, фигурирующие в (2.18) и (2.19), удовлетворяют бозонным коммутационным соотношениям (ср. с (2.6)):

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}] = 0 = [\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger]; \quad (2.20)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}. \quad (2.21)$$

Таким образом, в многомодовом случае э.м. поле можно рассматривать как сумму *независимых* гармонических осцилляторов, описываемых набором операторов уничтожения ($\hat{a}_{\mathbf{k}s} \equiv \hat{a}_j$) и рождения ($\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \equiv \hat{a}_j^\dagger$). Полный гамильтониан многомодового поля записывается как:

$$\hat{H} = \hbar \sum_j \omega_j \left(\hat{n}_j + \frac{1}{2} \right) \quad (2.22)$$

где $\hat{n}_j \equiv \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ – оператор числа частиц j -го осциллятора.

Квантовое состояние $|\psi\rangle$ многомодового поля с некоторым конечным (или бесконечным) числом независимых мод можно представить в виде тензорного произведения состояний:

$$|\psi\rangle \equiv |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_{j-1}\rangle \otimes |n_j\rangle \otimes |n_{j+1}\rangle \otimes \dots \quad (2.23)$$

Далее обозначение \otimes будет опущено для краткости.

Действие операторов уничтожения и рождения на состояние $|\psi\rangle$ тогда можно записать как:

$$\hat{a}_j |\psi\rangle = \sqrt{n_j} |n_1\rangle |n_2\rangle \dots |n_{j-1}\rangle |n_j - 1\rangle |n_{j+1}\rangle \dots; \quad (2.24)$$

$$\hat{a}_j^\dagger |\psi\rangle = \sqrt{n_j + 1} |n_1\rangle |n_2\rangle \dots |n_{j-1}\rangle |n_j + 1\rangle |n_{j+1}\rangle \dots \quad (2.25)$$

Таким образом, любой j -й оператор уничтожения (рождения) действует только на состояние, относящееся к той же j -й моде э.м. поля. Из уравнений (2.22), (2.24) и (2.25) следует, что энергия многомодового э.м. поля находится как:

$$E = \hbar \sum_j \omega_j \left(n_j + \frac{1}{2} \right), \quad (2.26)$$

где следует определить энергию E_0

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_j \hbar \omega_j, \quad (2.27)$$

называемую *энергией нулевых колебаний* гармонических осцилляторов. Для бесконечного числа мод E_0 расходится, что представляет определенную трудность в теории квантования поля [3].

2.2.2. Дипольное приближение

Пространственные колебания поля могут мало меняться на пространственных масштабах среды (составляющей атомы, квантовые точки и т.п.) во многих задачах взаимодействия излучения с веществом. В частности, в *оптическом* диапазоне для длины волны λ по-прежнему выполняется следующее условие:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \gg |\mathbf{r}_{at}|, \quad (2.28)$$

где $|\mathbf{r}_{at}|$ – характерный размер атома. В результате можно считать, что $e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}} \approx 1 \pm i\mathbf{k}\mathbf{r} \approx 1$. В этом пределе для одномодового (и линейно поляризованного в направлении X) квантованного поля можно записать:

$$\hat{\mathbf{E}}(t) = i \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_x [\hat{a} e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}]. \quad (2.29)$$

Это так называемое дипольное приближение, которое позволяет пренебречь пространственными эффектами при описании взаимодействия поля с веществом; оно будет использоваться ниже. В частности, для видимого света длина волны λ составляет величину порядка мкм. Во многих случаях $|\mathbf{r}_{at}|$ можно оценить как 0.053 нм, что соответствует боровскому радиусу. Таким образом, дипольное приближение работает с запасом в несколько порядков. В этом приближении энергия взаимодействия поля и вещества оказывается $V \approx dE$, а характерный масштаб матричного элемента дипольного момента d_{mn} оказывается порядка $e|\mathbf{r}_{at}| \approx 10^{-18}$ СГСЕ (1 дебай).

2.3. Операторы квадратур одномодового поля

Уравнения (2.7), записанные для квантового гармонического осциллятора, позволяют ввести безразмерные эрмитовы операторы квадратур, подобные координате (\hat{X}_1) и импульсу (\hat{X}_2) следующим образом:

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger); \quad (2.30)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (2.31)$$

В частности, оператор электрического поля (2.29) можно выразить через операторы (2.30) и (2.31):

$$\hat{E}(t) \simeq \hat{X}_1 \cos[\omega t] + \hat{X}_2 \sin[\omega t]. \quad (2.32)$$

Из уравнения (2.32) видно, что операторы \hat{X}_1 и \hat{X}_2 сдвинуты по фазе относительно друг друга на $\pi/2$. Также они удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2}, \quad (2.33)$$

которое является прямым следствием выражения (2.1). Из уравнения (2.33) следует, что:

$$\langle (\Delta\hat{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta\hat{X}_2)^2 \rangle \geq \frac{1}{16}, \quad (2.34)$$

где $\langle (\Delta\hat{X}_{1,2})^2 \rangle$ – дисперсия квадратуры $\hat{X}_{1,2}$.

Соотношение неопределенностей Гейзенберга (2.34) свидетельствует о невозможности одновременного и точного измерения квадратур $\hat{X}_{1,2}$ для квантового э.м. поля. Далее уравнение (2.34) будет уточнено для некоторых важных с точки зрения практического применения состояний.

2.4. Задачи

1. Докажите, что энергию классического э.м. поля в резонаторе объемом V можно записать как (см. рис. 2.1):

$$E_F = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) = \frac{V}{4} \left(\epsilon_0 \mathcal{E}^2 \sin^2[\omega t] + \frac{B^2}{\mu_0} \cos^2[\omega t] \right). \quad (2.35)$$

2. Докажите, что уравнение (2.35) соответствует классическому электромагнитному гармоническому осциллятору в следующей форме:

$$x(t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{2\omega^2}} \mathcal{E} \sin[\omega t]; \quad (2.36)$$

$$p(t) = \sqrt{\frac{V}{2\mu_0}} B \cos[\omega t] = \sqrt{\frac{\epsilon_0 V}{2}} \mathcal{E} \cos[\omega t]. \quad (2.37)$$

3. Проверьте коммутационное соотношение (2.1) для квантового гармонического осциллятора, используя квантово-механические определения операторов координаты \hat{x} и импульса \hat{p} .

4. Проверьте коммутационное соотношение (2.33).

5. Докажите, что оператор числа фотонов \hat{n} , определенный в (2.9), является эрмитовым.

6. Найдите матричную форму оператора числа фотонов (2.9).

7. Докажите коммутационные соотношения:

$$[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^2] = 2\hat{a}^\dagger, \quad [\hat{a}^2, \hat{a}^\dagger] = 2\hat{a}. \quad (2.38)$$

8. Докажите коммутационные соотношения:

$$[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n] = n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}; \quad [\hat{a}^n, \hat{a}^\dagger] = n\hat{a}^{n-1}, \quad (2.39)$$

где n – положительное целое число.

9. Докажите, что

$$[\hat{a}, \exp(\beta\hat{a}^\dagger)] = \beta\exp(\beta\hat{a}^\dagger), \quad (2.40)$$

где оператор $\exp(\beta\hat{a}^\dagger)$ определяется своим рядом Маклорена по степеням $\beta\hat{a}^\dagger$.

3. ОСНОВНЫЕ КВАНТОВЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1. Фоковские состояния электромагнитного поля

Рассмотрим *вакуумное состояние*, уже определенное выше в уравнении (2.13). Оно представляет собой частный случай фоковского состояния $|n\rangle$ с $n = 0$. Состояние произвольной размерности $|n\rangle$ можно получить из состояния вакуума с помощью применения набора операторов рождения, т.е.

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{(n!)^{\frac{1}{2}}} |0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

В квантовой оптике $|0\rangle$ представляет собой состояние с нулевым средним числом фотонов. Уравнение (2.13) означает, что состояний ниже $|0\rangle$ не существует. Из (2.4) видно, что вакуумное состояние обладает энергией $E_0 = \hbar\omega/2$, отличной от нуля.

Энергия вакуумного состояния бесконечна в случае многомодового излучения, для которого ее можно записать в следующем виде (ср. с (2.27)):

$$E_0 = \int_0^{+\infty} \frac{\hbar V \omega^3}{2\pi^2 c^3} d\omega. \quad (3.2)$$

Переход от дискретной формы (2.27) к непрерывной в (3.2) осуществляется путем замены суммирования по модам на соответствующий интеграл по частоте, если число мод, обладающих разными частотами, достаточно велико [5].

Формула (3.2) наглядно демонстрирует расходимость энергии нулевых колебаний. Однако в реальных экспериментах абсолютная энергия E_0 нас не интересует. Обычно измеряется разность энергий, которая остается конечной. С другой стороны, детекторы, используемые в экспериментах квантовой оптики, обладают конечной спектральной шириной пропускания, позволяющей рассматривать уравнение (3.2) в конечных спектральных пределах.

Теперь рассмотрим флуктуации э.м. поля, находящегося в состоянии вакуума. Из определений (2.30), (2.31) и (2.13) для средних имеем $\langle 0|\hat{X}_1|0\rangle = \langle 0|\hat{X}_2|0\rangle = 0$, но:

$$\langle (\Delta\hat{X}_1)^2 \rangle_{vac} = \langle (\Delta\hat{X}_2)^2 \rangle_{vac} = \frac{1}{4}. \quad (3.3)$$

Таким образом, из (3.3) следует, что для поля в вакуумном состоянии $|0\rangle$ соотношение неопределенностей Гейзенберга (2.34) минимально.

Рассмотрим *фоковские состояния*, определенные в (2.10) для произвольного ненулевого n . Эти состояния представляют собой полный набор базисных векторов в гильбертовом пространстве, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{\mathbf{1}}. \quad (3.4)$$

Используя (1.3)(а) и (2.10) легко показать, что:

$$\langle n|\hat{X}_1|n\rangle = \langle n|\hat{X}_2|n\rangle = 0. \quad (3.5)$$

Однако вторые моменты будут ненулевыми, так что:

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{X}_1^2|n\rangle &= \frac{1}{4}\langle n|\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \\ &= \frac{1}{4}\langle n|\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + 1|n\rangle = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\langle n|\hat{a}^2|n\rangle + \langle n|\hat{a}^{\dagger 2}|n\rangle + 2\langle n|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle) = \frac{1}{4}(2n + 1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подобным образом можно получить:

$$\langle n|\hat{X}_2^2|n\rangle = \frac{1}{4}(2n + 1). \quad (3.7)$$

Таким образом, дисперсии квадратур приобретают вид:

$$\langle (\Delta\hat{X}_1)^2 \rangle = \langle (\Delta\hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4}(2n + 1). \quad (3.8)$$

Для $n \gg 1$ произведение дисперсий растет как n^2 , что следует из (2.34) и (3.8).

Поскольку фоковское состояние – собственное состояние оператора числа фотонов \hat{n} (см. (2.16)), дисперсия числа фотонов равна:

$$\langle (\Delta\hat{n})^2 \rangle = 0. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) предполагает нефлуктуирующее число фотонов в пучке квантованного света в каждый момент времени. Поэтому фоковские состояния часто называют *состояниями с определенным числом фотонов*.

3.2. Оптические когерентные состояния

Лазеры давно уже являются важным инструментом исследований и разработок в науке и оптических технологиях, играют важную роль в коммуникации, промышленности, медицине, экологии и т.д. Хотя о лазерах нередко даже в академической среде говорят как о классических источниках э.м. поля, в общем случае такое утверждение неверно. Квантовые флуктуации имеют принципиальное значение для характеристик лазерного поля и могут быть исследованы в различных научных приложениях квантовых информационных технологий и фотоники. Здесь будет представлено простое квантово-оптическое описание одномодового лазерного излучения в области значительно выше порога лазерной генерации. Это описание основано на знаменитом подходе Глаубера к когерентным состояниям в оптике.

Определим когерентное состояние $|\alpha\rangle$ как собственное состояние оператора уничтожения фотона \hat{a} :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (3.10)$$

где α – комплексное число, собственное значение \hat{a} . Примечательно, что уравнение, эрмитово сопряженное выражению (3.10), записывается как

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*. \quad (3.11)$$

Решение уравнений (3.10) и (3.11) следует искать в виде линейной суперпозиции бесконечного числа фоковских состояний $|n\rangle$. После несложных вычислений решения уравнений (3.10) и (3.11) можно записать в следующей форме:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = (1 - |\alpha|^2)|0\rangle + \alpha|1\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}|2\rangle + \dots, \quad (3.12)$$

$$\langle\alpha| = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle n|.$$

Из (3.12) видно, что одномодовое когерентное состояние есть бесконечная суперпозиция всех фоковских состояний. Условие нормировки $|\alpha\rangle$ легко проверяется прямым расчетом:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2} = 1. \quad (3.13)$$

Стоит отметить, что два произвольных когерентных состояния $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ не ортогональны, т.е.

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \beta|^2). \quad (3.14)$$

Таким образом, когерентные состояния образуют переполненный набор состояний в гильбертовом пространстве. Однако для достаточно больших амплитуд $\alpha \neq \beta$ можно предположить, что перекрытие когерентных состояний $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2$ стремится к нулю.

Рассмотрим статистические свойства одномодового поля, находящегося в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Математическое ожидание операторов уничтожения и рождения фотонов, $\langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle$, можно сразу вычислить с помощью свойств правого и левого собственных значений (3.10) и (3.11):

$$\langle\hat{a}\rangle \equiv \langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha, \quad \langle\hat{a}^\dagger\rangle \equiv \langle\alpha|\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \alpha^*. \quad (3.15)$$

Из уравнения (3.15) становится ясен физический смысл α . Для среднего значения оператора электрического поля $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$, определенного в (2.17), можно получить:

$$\langle\alpha|\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)|\alpha\rangle = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_x [\alpha e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} - \alpha^* e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}]. \quad (3.16)$$

Поскольку э.м. поле в (3.16) линейно поляризовано в направлении X , для простоты рассмотрим только его скалярную компоненту. Записав α в полярной форме $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$, из (3.16) получим:

$$\langle \alpha | \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) | \alpha \rangle = 2|\alpha| \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin[\omega t - \mathbf{kr} - \phi]. \quad (3.17)$$

Уравнение (3.17) выглядит как классическое поле плоской монохроматической волны с амплитудой \mathcal{E} [8]:

$$E(t) = \frac{1}{2} (\mathcal{E} e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} + \mathcal{E}^* e^{-i[\omega t - \mathbf{kr}]}) = |\mathcal{E}| \cos[\omega t - \mathbf{kr} - \theta], \quad (3.18)$$

где θ – фаза классического поля. В результате чего можно установить соответствие между амплитудой классического поля \mathcal{E} и параметром α в виде:

$$\mathcal{E} \mapsto 2i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha, \quad \mathcal{E}^* \mapsto -2i \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha^*. \quad (3.19)$$

Среднее число фотонов $\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle$ можно получить из (3.10) и (3.11):

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \alpha^* \cdot \alpha | \alpha \rangle = |\alpha|^2. \quad (3.20)$$

Таким образом, вещественный параметр $|\alpha|$ играет роль амплитуды классического поля для когерентного светового поля.

Теперь перейдем к рассмотрению флуктуаций э.м. излучения в когерентном состоянии. Момент второго порядка от числа фотонов можно вычислить с помощью процедуры нормального упорядочения, когда все операторы рождения перемещаются левее операторов уничтожения. Эта процедура использует коммутационное соотношение (2.6) и приводит к следующему выражению:

$$\hat{n}^2 = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) \hat{a} = \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (3.21)$$

Средние значения нормально упорядоченного оператора (3.21) теперь можно легко рассчитать для когерентного состояния, используя (3.10) и (3.11). Таким образом, из (3.21) получаем:

$$\langle \hat{n}^2 \rangle \equiv \langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \langle \hat{n} \rangle^2 + \langle \hat{n} \rangle. \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует выражение для дисперсии числа фотонов:

$$\sigma_n^2 \equiv \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2. \quad (3.23)$$

Ненулевая правая часть в уравнении (3.23) – следствие особенностей статистики фотонов в когерентном пучке света. В квантовой оптике эти особенности характеризуются распределением Пуассона для переменной числа фотонов n . В самом деле, вероятность нахождения n фотонов в одномодовом когерентном состоянии $|\alpha\rangle$ можно получить из (3.12) по формуле:

$$p_n = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} = \frac{\langle \hat{n} \rangle^n}{n!} e^{-\langle \hat{n} \rangle}, \quad (3.24)$$

что, очевидно, является распределением вероятностей Пуассона.

Относительное (нормированное) стандартное отклонение числа фотонов в когерентном состоянии равно

$$\frac{\sigma_n}{\langle \hat{n} \rangle} = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{n} \rangle}} \quad (3.25)$$

В квантовой теории оператор числа фотонов \hat{n} представляет фазово-сопряженную переменную, оператор которой не коммутирует с оператором фазы э.м. поля. Заметим, что корректное определение фазового оператора – нетривиальная задача квантовой оптики [5].

Для достаточно большого среднего числа фотонов соотношение неопределенностей Гейзенберга для числа частиц и фазы можно записать как [4]:

$$\sigma_n^2 \sigma_\phi^2 \geq \frac{1}{4}, \quad (3.26)$$

где σ_ϕ^2 – дисперсия квантовой фазы. Для когерентного света, подставляя выражение (3.23) в (3.26), получаем:

$$\sigma_\phi^2 = \frac{1}{4\langle \hat{n} \rangle}. \quad (3.27)$$

Физическое масштабирование фазовых флуктуаций, приведенное в уравнении (3.27), играет важную роль в квантовой метрологии. В частности, квантовые измерения и последующая оценка некоторого неизвестного относительного фазового параметра ϕ , полученного в интерферометрах Маха–Цандера или Майкельсона, могут быть выполнены с помощью входного когерентного пробного поля с точностью $\sigma_{\phi,SQL} = 1/\sqrt{\langle \hat{n} \rangle}$, которая известна как *стандартный квантовый предел* фазовых измерений [9]; σ_ϕ обращается в ноль с увеличением среднего числа фотонов в когерентном состоянии. Для очень большого среднего числа фотонов, $\langle \hat{n} \rangle \gg 1$, σ_ϕ стремится к нулю, что означает точно определенную фазу квазиклассического светового излучения в когерентном состоянии.

Таким образом, из уравнений (3.17), (3.19) и (3.27) следует, что когерентное состояние близко к классическому при очень большой интенсивности поля α .

Флуктуации операторов квадратур в когерентном состоянии могут быть вычислены с помощью уравнений (2.6), (2.30), (2.31), (3.11) и (3.12). После некоторых преобразований получаем:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle_\alpha = \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle_\alpha = \frac{1}{4}. \quad (3.28)$$

Уравнение (3.28) играет важную роль в квантовой физике. Оно показывает, что дисперсии квадратур поля в когерентном состоянии совпадают с дисперсиями вакуумного состояния (сравните с (3.3)) и не зависят от амплитуды поля α . Очевидно, что в произвольном когерентном состоянии соотношение неопределенностей Гейзенберга (2.34) принимает свое минимальное значение.

Уравнение (3.28) позволяет выявить флуктуации одномодового электрического поля $\hat{E}(\mathbf{r}, t)$. Стандартное отклонение σ_E равно:

$$\sigma_E \equiv \langle (\Delta \hat{E})^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.29)$$

и идентично случаю вакуумного состояния.

В квантовой оптике когерентное состояние (3.12) представляют также в более компактной форме. В частности, с помощью (3.1) можно переписать определение когерентного состояния (3.12) как:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = \exp\left(\alpha \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} |\alpha|^2\right) |0\rangle. \quad (3.30)$$

Используя свойства вакуумного состояния, (3.30) можно переписать как:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle, \quad (3.31)$$

где вводится *оператор смещения (или сдвига) когерентного состояния* $\hat{D}(\alpha)$, определяемый в виде:

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}). \quad (3.32)$$

Таким образом, в соответствии с уравнением (3.31), когерентное состояние получается действием оператора смещения $\hat{D}(\alpha)$ на вакуумное состояние. Оператор $\hat{D}(\alpha)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha) = 1. \quad (3.33)$$

Уравнения (3.30)–(3.33) обычно используются для объяснения различных свойств квантованного э.м. поля в схемах с неклассическим светом. Эти свойства выходят за рамки данного курса и могут быть найдены в ряде учебников по квантовой оптике, например, [4,5,10]. Здесь отметим только функцию квазивероятности (функцию Хусими), которая для произвольного чистого состояния $|\psi\rangle$ может быть определена как:

$$Q = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \psi \rangle|^2. \quad (3.34)$$

В квантовой механике функций совместной вероятности не существует в фазовом пространстве импульса и координаты (эрмитовы квадратуры) из-за соотношения неопределённости (2.2) между ними. Однако квазивероятностная функция иногда дает полезную информацию о заданном квантовом состоянии $|\psi\rangle$ системы. Например, для произвольного когерентного состояния $|\psi\rangle = |\beta\rangle$ -функция – гауссиан, воспроизводящий результат (3.14).

Полученные результаты обобщены на рис. 3.1. Поскольку две квадратуры э.м. поля X_1 и X_2 соотносятся с координатой и импульсом квантового оптического осциллятора, имеет смысл ввести произвольное состояние света в фазовой плоскости (X_1 0 X_2).

В таком случае в рамках *классической* электродинамики состояние идеального (нефлуктуирующего) э.м. поля может быть представлено точкой в фазовом пространстве (на рис. 3.1(а) это точка А). В рамках класси-

ческого подхода э.м. поле обладает точно определенными амплитудой и фазой, обозначенными как φ , x_1 , x_2 на рис. 3.1(а), соответственно.

В *квантовом* пределе из-за соотношения неопределенностей (2.34) состояние квантового поля в фазовой плоскости занимает некоторую область, присущую квантовым флуктуациям квадратур поля, амплитуды (числа фотонов) и фазы, соответственно. Зеленая область на рис. 3.1(б) соответствует *вакуумному состоянию* света и демонстрирует квантовые флуктуации, имеющие нулевые средние значения для обеих квадратур.

Когерентное состояние света описывается теми же дисперсиями квадратур, но сдвинутыми от нуля на амплитуду поля $|\alpha|$, см. рис. 3.1(в). Флуктуации квадратурных переменных поля такие же, как и для вакуумного состояния. Состояние приближается к классическому случаю с четко выраженной фазой за счет увеличения среднего числа фотонов (интенсивности поля).

Схематически, статистические особенности квадратур светового поля в *фоковском состоянии* показаны на рис. 3.1(г). Поскольку дисперсия числа фотонов равна нулю (см. (2.16)), здесь неопределенность имеет вид окружности: интенсивность поля (число фотонов n) фиксирована, а фаза φ не определена. Грубо говоря, фоковское состояние – предельное состояние э.м. поля, которое требует поддержания точно определенной энергии фотонов на протяжении всей процедуры измерения. Поэтому создание фоковского состояния с *большим числом* фотоном представляет собой сложную экспериментальную задачу.

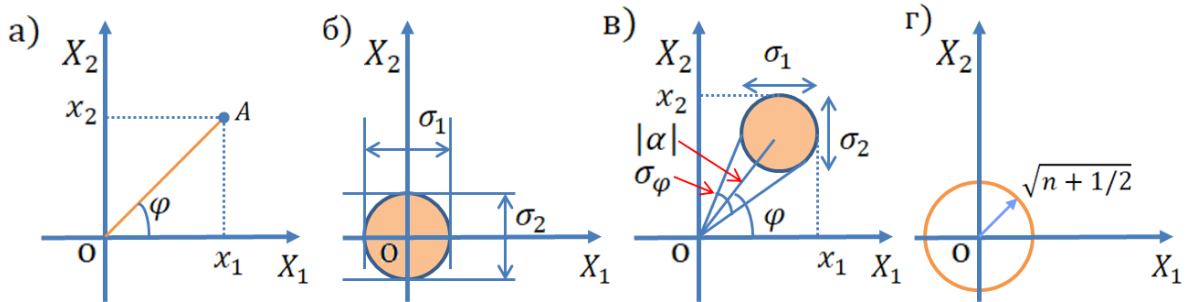


Рис. 3.1. Фазовые диаграммы а) классического, б) вакуумного, в) когерентного и г) фоковского состояния света. $x_{1,2}$ – средние значения квадратур. Закрашенные области характеризуют стандартные отклонения квадратур $\sigma_{1,2} = \langle (\Delta \hat{X}_{1,2})^2 \rangle^{1/2} = 1/2$ для вакуумного и когерентного состояния

3.3. Детектирование квадратур квантованного светового поля

Детектирование квадратур светового поля и их дисперсий осуществляется с помощью метода балансного гомодинирования. Он основан на смешивании сигнального (квантованного) поля, с сильным когерентным полем опорного генератора (в англоязычной литературе его называют *локальным осциллятором*). Схема измерения показана на рис. 3.2. Свойства

квантовой моды \hat{a} подлежат верификации. Мода \hat{b} принадлежит сильному полю, которое можно считать известным когерентным состоянием с амплитудой β . Предполагается, что светоделитель имеет соотношение 50:50 по отношению к отражательной и пропускательной способностям. В этом случае преобразование операторов уничтожения фотонов на входе (\hat{a} , \hat{b}) светоделителя и его выходе (\hat{c} , \hat{d}) определяется соотношениями

$$\hat{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + i\hat{b}); \quad (3.35)$$

$$\hat{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b} + i\hat{a}). \quad (3.36)$$

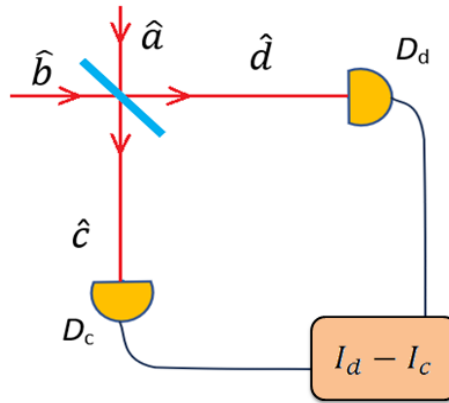


Рис. 3.2. Измерение квадратур одномодового квантового поля и их дисперсий, описываемого оператором уничтожения фотонов \hat{a} . \hat{b} – оператор уничтожения сильного поля опорного генератора, имеющего ту же несущую частоту, но находящегося в когерентном состоянии. Детекторы света D_d и D_c регистрируют интенсивности I_d и I_c , преобразуя их в фототоки. С помощью электронной схемы измеряется разностный фототок $I_d - I_c$ и его дисперсии флуктуаций, регистрируемые спектр-анализатором (не показан на рисунке)

Детекторы, расположенные на пути выходных пучков, измеряют числа фотонов $\hat{c}^\dagger \hat{c}$, $\hat{d}^\dagger \hat{d}$, которые дают интенсивности I_c и I_d поля, усредненные по когерентному состоянию поля опорного генератора. Эти интенсивности преобразуются детекторами в фототок. Если детекторы идеальные, то эти фототоки с точностью до константы совпадают с исходными интенсивностями. В результате для разности интенсивностей можно написать

$$I_c - I_d = \langle \hat{n}_{cd} \rangle = \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle = i \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{a} \hat{b}^\dagger \rangle = |\beta| \{ \hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \}, \quad (3.37)$$

где мы использовали уравнения (3.35), (3.36) для получения последнего выражения. Предполагая, что мода \hat{b} находится в когерентном состоянии $|\beta\rangle$, где $\beta = |\beta| e^{-i\theta_0}$, имеем

$$\langle \hat{n}_{cd} \rangle = |\beta| \{ \hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \}, \quad (3.38)$$

где $\theta = \theta_0 + \pi/2$. Предполагая, что свет моды \hat{a} также имеет ту же несущую частоту ω (а на практике световые поля мод \hat{a} и \hat{b} получаются от одного и того же лазера), так что получаем

$$\langle \hat{n}_{cd} \rangle = 2|\beta| \langle \hat{X}(\theta) \rangle, \quad (3.39)$$

где

$$\hat{X}(\theta) = \frac{1}{2} \{ \hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \} \quad (3.40)$$

– обобщенная квадратура анализируемого поля \hat{a} . Фаза θ легко управляется в эксперименте путем изменения θ_0 . В частности, при θ из (3.40) получаем квадратуру $\hat{X}_1 = \hat{X}(\theta = 0)$. Напротив, при $\theta = \pi/2$ из (3.40) получаем сопряженную квадратуру $\hat{X}_2 = \hat{X}(\theta = \pi/2)$.

Дисперсия оператора разности числа фотонов на выходе \hat{n}_{cd} в пределе сильного поля опорного генератора равна

$$\langle (\Delta \hat{n}_{cd})^2 \rangle = 4|\beta|^2 \langle (\Delta \hat{X}(\theta))^2 \rangle. \quad (3.41)$$

В пределе когерентного состояния для моды \hat{a} минимальное значение (3.41) есть $\langle (\Delta \hat{n}_{cd})^2 \rangle = |\beta|^2$, что, по сути, определяет уровень дробового шума для схемы балансного гомодинного детектора на рис. 3.2. Если к этому вопросу подходить более аккуратно, то в дробовой шум входят также собственные шумы фотодетекторов, обусловленные их неидеальностью, т.е. обладающие эффективностью меньше 100%. В этом случае квантовые флуктуации поля принято отсчитывать именно от этого дробового шума, чтобы исключить собственные шумы детекторов.

3.4. Сжатые (по флуктуациям) состояния света

3.4.1. Одномодовое сжатое вакуумное состояние (ОСВС)

Несмотря на всю важность практического применения когерентных состояний, они не являются в полном смысле неклассическими состояниями светового поля и допускают наглядную классическую интерпретацию. Вместе с тем в квантовой оптике существуют состояния, которые не могут быть описаны и экспериментально получены никакими классическими способами. В общем виде класс таких состояний называют сжатыми, имея в виду сжатие одной из квадратур ниже уровня вакуумных шумов.

Теоретически одномодовое сжатое вакуумное состояние (ОСВС) может быть определено с помощью оператора сжатия

$$\hat{S}(\zeta) = \exp\left(\frac{1}{2}(\zeta \hat{a}^2 - \zeta^* \hat{a}^{\dagger 2})\right), \quad (3.42)$$

действующего на вакуумное состояние, т.е.

$$|\zeta\rangle = \hat{S}(\zeta)|0\rangle, \quad (3.43)$$

где $\zeta = r \exp(i\theta)$ – параметр сжатия ($0 \leq r < +\infty$), а θ – фаза сжатия, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Оператор сжатия обладает следующим свойством:

$$\hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{S}(\zeta) = \hat{S}(\zeta)\hat{S}^\dagger(\zeta) = 1. \quad (3.44)$$

Данное свойство гарантирует нормировку ОСВС:

$$\langle \zeta | \zeta \rangle = \langle 0 | \hat{S}^\dagger(\zeta)\hat{S}(\zeta) | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1. \quad (3.45)$$

Для понимания физической сути ОСВС удобно использовать разложение (3.42) в ряд Тейлора, полагая ζ вещественной величиной ($\theta = 0$), так что

$$\hat{S}(\zeta = r) \simeq 1 + \frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}) + \frac{r^2}{4}(\hat{a}^4 + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2) + \dots \quad (3.46)$$

В этом приближении ОСВС представляет разложение

$$|\zeta\rangle = \hat{S}(r)|0\rangle = |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}r|2\rangle + \frac{r^2}{2}|0\rangle + 6r^2|2\rangle + \dots \quad (3.47)$$

Из (3.47) видно, что в ОСВС $|\zeta\rangle$ присутствуют члены, содержащие четное число частиц, т.е. фотоны появляются только парами, что существенно отличает $|\zeta\rangle$ от когерентного состояния $|\alpha\rangle$, где присутствуют фотоны всех фоковских состояний, ср. с (3.12). В этом смысле ОСВС следует полагать более чувствительными к потерям, поскольку потеря одного фотона способна превратить сжатый вакуум в ОСВС в состояние, более похожее на когерентное.

В общем случае ОСВС можно разложить в суперпозицию состояний с определенным числом частиц:

$$|\zeta\rangle = \hat{S}(\zeta)|0\rangle = \sum_n D_n |n\rangle. \quad (3.48)$$

Чтобы найти D_n , рассмотрим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} 0 = \hat{a}|0\rangle &= \hat{S}(r)\hat{a}|0\rangle = \hat{S}(r)\hat{a}\hat{S}^\dagger(r)\hat{S}(r)|0\rangle = \hat{S}(r)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\zeta)|\zeta\rangle = \\ &= (\hat{a} \cosh[r] + \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh[r])|\zeta\rangle. \end{aligned}$$

То есть,

$$(\hat{a} \cosh[r] + \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh[r])|\zeta\rangle = 0. \quad (3.49)$$

Тогда можно написать

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{a} \cosh[r] + \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh[r] \sum_n D_n |n\rangle = \\ &= \sum_n \cosh[r] D_n \sqrt{n} |n-1\rangle + \sum_n \sinh[r] e^{i\theta} \sqrt{n+1} |n+1\rangle = \\ &= \sum_n (\cosh[r] D_{n+1} + \sinh[r] e^{i\theta} D_{n-1}), \end{aligned} \quad (3.50)$$

что приводит к рекуррентному соотношению вида

$$D_{n+1} = -e^{i\theta} \tanh[r] \sqrt{\frac{n}{n+1}} D_{n-1}. \quad (3.51)$$

Видно, что существует два различных решения, одно из которых включает только четные состояния фотонов, а второе – только нечетные состояния фотонов. Очевидно, что только четное решение содержит вакуумное состояние, поэтому рассматриваем здесь только этот случай. Решение рекуррентного соотношения имеет вид:

$$D_{2m} = (-1)^m (e^{i\theta} \tanh[r])^m \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right]^{1/2} D_0. \quad (3.52)$$

где $D_0 = \sqrt{\cosh[r]}$ определяется из условия нормировки

$$\sum_{m=0}^{\infty} |D_{2m}|^2 = 1, \quad (3.53)$$

которое после несложных преобразований приводит к соотношению

$$D_{2m} = (-1)^m \frac{\sqrt{(2m)!} (e^{i\theta} \tanh[r])^m}{2^m m! \sqrt{\cosh[r]}}. \quad (3.54)$$

Таким образом, сжатое вакуумное состояние можно представить в виде

$$|\zeta\rangle = \sqrt{\operatorname{sech}[r]} \sum_n \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \left(\frac{-e^{i\theta} \tanh[r]}{2} \right)^n |2n\rangle. \quad (3.55)$$

Используя теорему Бейкера–Хаусдорфа (1.65), можно показать, что операторы уничтожения (\hat{a}) и рождения (\hat{a}^\dagger) в результате ОСВС подчиняются линейным преобразованиям Боголюбова, имеющим вид:

$$\hat{b} = \hat{S}^\dagger(\zeta) \hat{a} \hat{S}(\zeta) = \hat{a} \cosh[r] - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh[r], \quad (3.56)$$

$$\hat{b}^\dagger = \hat{S}^\dagger(\zeta) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\zeta) = \hat{a}^\dagger \cosh[r] - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh[r]. \quad (3.57)$$

При этом прямым вычислением легко убедиться, что эти преобразования не меняют бозонных коммутационных соотношений, т.е.

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \cosh^2[r] - \sinh^2[r] = 1. \quad (3.58)$$

Выражения (3.43), (3.44), (3.56), (3.57) позволяют получить для средних от операторов уничтожения и рождения фотонов следующие соотношения

$$\begin{aligned} (a) \quad \langle \hat{a} \rangle &= \langle \zeta | \hat{a} | \zeta \rangle = \langle 0 | \hat{S}^\dagger \hat{a} \hat{S} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{b} | 0 \rangle = 0; \\ \langle \hat{a}^2 \rangle &= \langle \zeta | \hat{a}^2 | \zeta \rangle = \langle 0 | \hat{S}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{S} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{S}^\dagger \hat{a} \hat{S} \hat{S}^\dagger \hat{a} \hat{S} | 0 \rangle = \\ (б) \quad &= \langle 0 | \hat{b}^2 | 0 \rangle = -\frac{1}{2} e^{i\theta} \sinh[2r]; \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$(в) \quad \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \langle \zeta | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \zeta \rangle = \langle 0 | \hat{S}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{S} \hat{S}^\dagger \hat{a} \hat{S} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{b}^\dagger \hat{b} | 0 \rangle = \sinh^2[r].$$

Последнее выражение (3.59)(в) показывает, что среднее число фотонов для ОСВС света имеет исключительно квантовую природу и возникает из-за вакуумных флуктуаций поля в нелинейной среде. На основе (3.59) можно рассчитать дисперсии квадратур (2.30), (2.31) ОСВС в виде

$$\left\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \right\rangle = \frac{1}{4} (\cosh^2[r] + \sinh^2[r] - \sinh[2r] \cos[\theta]), \quad (3.60)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} (\cosh^2[r] + \sinh^2[r] + \sinh[2r] \cos[\theta]). \quad (3.61)$$

При $\theta = 0$ отсюда имеем:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r}, \quad (3.62)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r}. \quad (3.63)$$

Выражения (3.62), (3.63) имеют ясный физический смысл. Они показывают, что дисперсия одной из квадратур (в данном случае \hat{X}_1) находится в *сжатом состоянии* (в англоязычной литературе давно устоялся термин “squeezed state”), т.е. ниже уровня вакуумных флуктуаций (3.3), в то время как дисперсия фазово-сопряженной квадратуры (\hat{X}_2) больше таковой. Геометрически эта ситуация проиллюстрирована на рис. 3.3. ОСВС светового поля характеризуется эллипсом неопределенности, сжатым по одной из осей (квадратур).

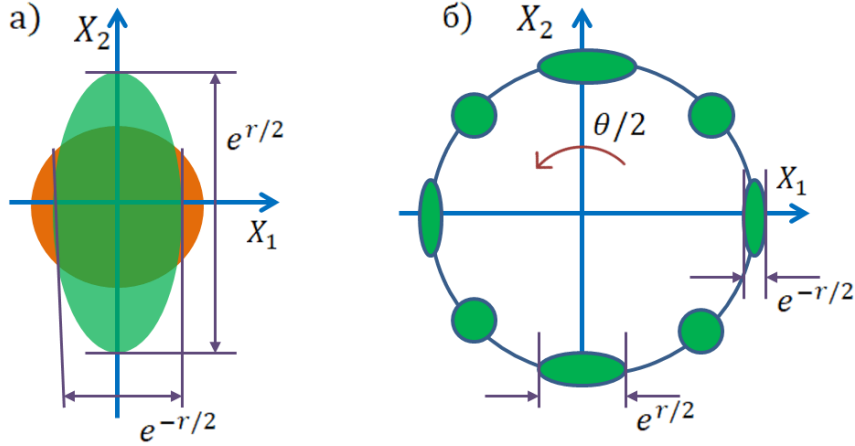


Рис. 3.3. а) Фазовая диаграмма ОСВС светового поля. Закрашенная область характеризует стандартные отклонения квадратур $\sigma_{1,2} = \langle (\Delta \hat{X}_{1,2})^2 \rangle^{1/2}$. Красная область соответствует вакуумным флуктуациям поля $\sigma_{1,2} = 1/2$, а зеленая – ОСВС. б) Эволюция ОСВС света в зависимости от θ

На рис. 3.3(б) показана эволюция дисперсии \hat{X}_1 согласно (3.60) как функции θ . При $\theta = \pi$ значения (3.62), (3.63) меняются местами и эллипс на рис. 3.3 поворачивается на $\pi/2$. В общем случае ориентация эллипса на фазовой плоскости характеризуется фазой сжатия $\theta/2$. В частности, при $\theta = \pi/2$ дисперсии квадратур (3.60), (3.61) равны между собой, что соответствует кружкам на рис. 3.3(б), и не соответствуют эффекту сжатия. В этом случае:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} (\cosh^2[r] + \sinh^2[r]). \quad (3.64)$$

Важно отметить, что соотношение неопределенностей для ОСВС света не нарушается. На рис. 3.4 показаны допустимые значения стандартных отклонений квадратур для сжатых состояний света. Состояния, находя-

щиеся между красной и синей кривыми, называются сжатыми состояниями, поскольку одна из квадратур обладает шумами, соответствующими условию $\sigma_{1,2} < 1/4$. Состояния сжатого вакуума лежат на синей кривой.

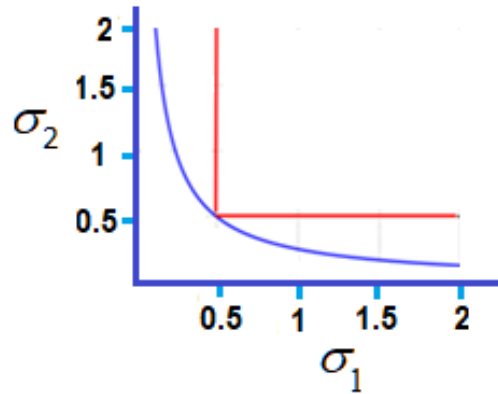


Рис. 3.4. Распределение среднеквадратичных отклонений $\sigma_{1,2} = \langle (\Delta \hat{X}_{1,2})^2 \rangle^{1/2}$ квадратур с учетом соотношения неопределенностей $\sigma_1 \sigma_2 = 1/4$. Все состояния между красной и синей кривыми являются сжатыми состояниями. Состояния сжатого вакуума лежат на синей кривой

3.4.2. Статистика фотонов

Рассмотрим теперь статистику фотонов в поле ОСВС. Вероятность детектирования $2m$ фотонов есть

$$P_{2m} = |\langle 2m | \xi \rangle|^2 = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \frac{(\tanh r)^{2m}}{\cosh r}, \quad (3.65)$$

тогда как вероятность регистрации $2m + 1$ фотонов равна нулю:

$$P_{2m+1} = |\langle 2m + 1 | \xi \rangle|^2 = 0. \quad (3.66)$$

Таким образом, сжатый вакуум имеет ненулевую вероятность заполнения только для четного числа фотонов. На рис. 3.5 показана функция (3.65) для разного среднего числа фотонов.

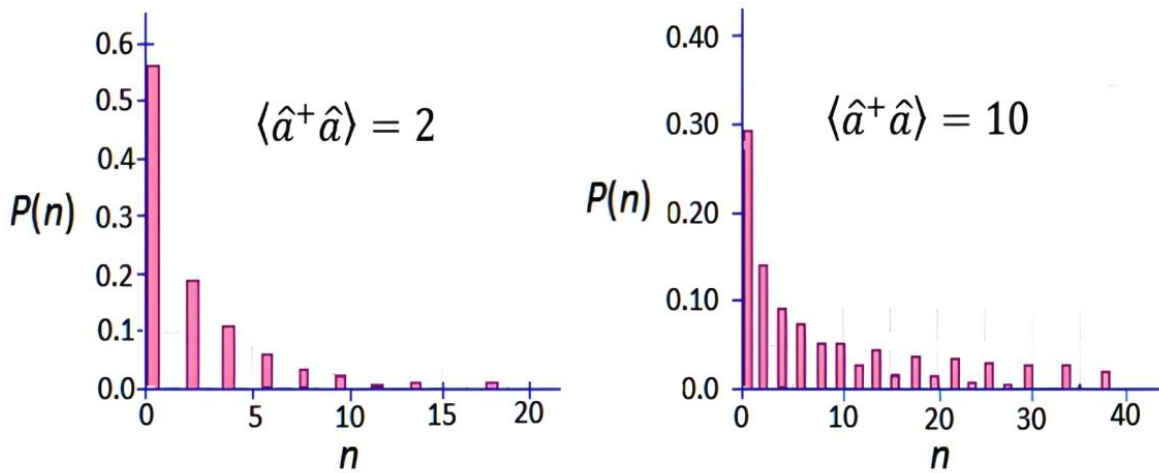


Рис. 3.5. Распределение $P(n)$ вероятности обнаружения n фотонов для состояний сжатого вакуума со средним числом фотонов 2 и 10

Отметим, что состояние сжатого вакуума можно «сместить» на фазовой плоскости на величину когерентной амплитуды поля, как это происходит для когерентного состояния (рис. 3.6). Математически такая процедура описывается состоянием

$$|\zeta, \alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle. \quad (3.67)$$

Такое состояние называются **одномодовым сжатым когерентным состоянием** (ОСКС) светового поля. Физически они обладают рядом особенностей, которые отличают их от ОСВС:

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2[r]. \quad (3.68)$$

Выражение (3.68) имеет простой физический смысл: среднее число фотонов в сжатом когерентном состоянии состоит из среднего числа фотонов когерентной части – первое слагаемое в (3.68), и квантового вклада шумовых фотонов – второе слагаемое в (3.68). Можно показать, что в базисе фокковских состояний ОСКС представимо в виде

$$|\alpha, \xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh[r]}} \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}\alpha^{*2}e^{i\theta} \tanh[r]\right] \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}e^{i\theta} \tanh[r]\right]^{n/2}}{\sqrt{n!}} H_n \left[\gamma(e^{i\theta} \sinh[2r])^{-1/2}\right] |n\rangle, \quad (3.69)$$

где $H_n(x)$ – полином Эрмита. С помощью (3.69) можно определить вероятность детектирования n фотонов в ОСКС, которая есть

$$P_n = |\langle n|\alpha, \xi\rangle|^2 = \\ = \frac{\left[\frac{1}{2} \tanh[r]\right]^n}{n! \cosh[r]} \exp\left[-|\alpha|^2 - \frac{1}{2}(\alpha^{*2}e^{i\theta} + \alpha^2e^{-i\theta}) \tanh[r]\right] \times \\ \times \left|H_n \left[\gamma(e^{i\theta} \sinh[2r])^{-1/2}\right]\right|^2. \quad (3.70)$$

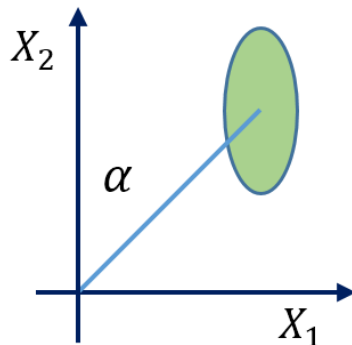


Рис. 3.6. Одномодовое сжатое когерентное состояние на фазовой плоскости, полученное в результате смещения ОСВС на амплитуду когерентного состояния α

Распределения вероятностей числа фотонов $P_n = |\langle n|\alpha, \xi\rangle|^2$ для ОСКС при различных значениях фазы показано на рис. 3.7. Важной особенностью

этих зависимостей является возможность получения света с распределением более узким, чем когерентное (пуассоновское распределение) – точечная кривая (рис. 3.7). Такая статистика фотонов называется *субпуассоновской*, а соответствующие состояния света – амплитудно-сжатыми, поскольку сжатию флуктуаций подвергается число фотонов, т.е. амплитуда поля. При другом значении фазы распределение числа фотонов становится шире пуассоновского (*суперпуассоновским*). В этом случае подавляются фазовые флуктуации изначально когерентного светового поля.

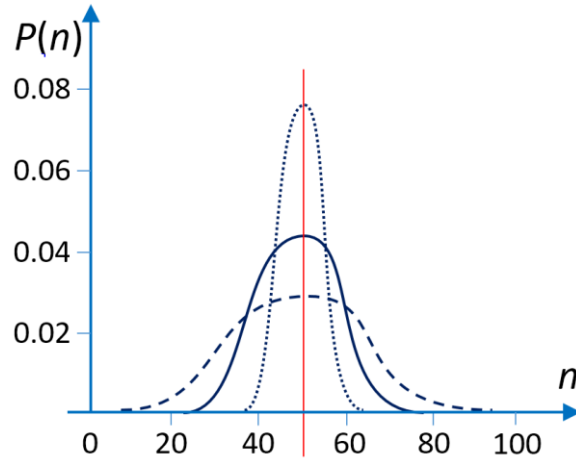


Рис. 3.7. Распределения вероятностей числа фотонов (действительны только для целых чисел) в пучке света, находящегося в когерентном состоянии с $|\alpha|^2 = 50$ (сплошная линия, пуассоновское распределение фотонов) и оптимизированных по фазе θ сжатых состояний для $|\alpha|^2 = 50$, $r = 0.5$; точечная линия – субпуассоновское распределение фотонов, пунктирная линия – суперпуассоновское распределение фотонов

3.5. Генерация квадратурного сжатого света

3.5.1. Спонтанное параметрическое рассеяние света (СПРС)

Как это следует из приведенного выше анализа, для генерации ОСВС светового поля необходима реализация квантово-оптического процесса, который соответствовал бы действию оператора сжатия $\hat{S}(\zeta)$, определенного нами в (3.42). Физическим процессом, обеспечивающим такое преобразование является *спонтанное параметрическое рассеяние света* (СПРС), представляющее из себя трехфотонный нелинейный процесс в среде с квадратичной восприимчивостью показателя преломления $\chi^{(2)}$. Для рассматриваемого процесса в стационарном приближении и безграничного кристалла справедливы законы сохранения энергии и импульсов (волновых векторов) фотонов:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad \hbar\omega_p &= \hbar\omega_s + \hbar\omega_i, \\ \text{(б)} \quad \hbar\mathbf{k}_p &= \hbar\mathbf{k}_s + \hbar\mathbf{k}_i \end{aligned} \tag{3.71}$$

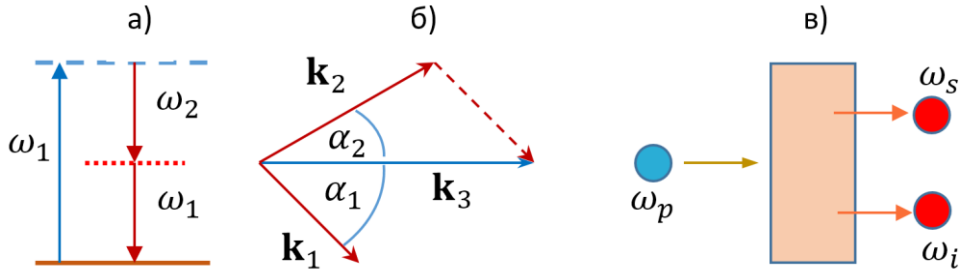


Рис. 3.8. а) Нелинейный трехфотонный процесс СПРС с поглощением фотона накачки частоты ω_p и одновременным испусканием фотонов сигнального и холостого поля с частотами ω_s и ω_i , соответственно. Представлен вырожденный по частоте случай $\omega_s = \omega_i \approx \omega_p/2$; б) иллюстрация закона сохранения импульса для фотонов в СПРС в коллинеарном случае $k_p \approx 2k$, где $k = k_s = k_i$; в) схематическое изображение вырожденного коллинеарного СПРС в кристалле с квадратичной нелинейностью $\chi^{(2)}$, позволяющей получать ОСВС

Из рис. 3.8(а) видно, что для генерации ОСВС света в нелинейной среде происходит **вырожденный** процесс с понижением частоты. При этом среда накачивается сильным классическим полем с частотой ω_p , в результате чего образуются фотоны сигнальной и холостой мод, которые полностью идентичны друг другу по частоте, поляризации, направлению, см. рис. 3.8(в). Важно заметить, что эти фотоны появляются из вакуумных флуктуаций, возбуждаемых классической накачкой, и не имеют аналогов в классической оптике. В этом приближении Гамильтониан СПРС может быть записан в виде

$$\hat{H}_{int} = i\hbar (s^* \hat{a}^2 - s \hat{a}^{\dagger 2}), \quad (3.72)$$

где $s \propto \chi^{(2)} \sqrt{I_p}$ характеризует эффективность преобразования поля накачки с интенсивностью I_p в сигнальный и холостой фотоны. В выражении (3.72) мы опустили слагаемые, ответственные за эволюцию свободных от взаимодействия фотонов, поскольку нас интересует только их взаимодействие.

В результате, ассоциированный с \hat{H}_{int} оператор эволюции имеет вид (см. (1.45)):

$$\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}_{int}t/\hbar) = \exp(s^* t \hat{a}^2 - s t \hat{a}^{\dagger 2}). \quad (3.73)$$

Теперь, если положить $\zeta = 2\eta t$ ($r = 2|s|t$), то оператор эволюции (3.73) в точности совпадает с оператором сжатия, т.е. $\hat{U}(t) = \hat{S}(\zeta)$, сравните с (3.42).

Как это следует из (3.60), идеального (100%) сжатия $\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle \rightarrow 0$ можно добиться лишь в пределе $r \rightarrow \infty$, что физически требует бесконечно больших значений параметра r . Поскольку r зависит от времени t взаимодействия фотонов в среде, то нелинейный кристалл помещают в резонатор,

чтобы эффективно увеличить это время взаимодействия. На практике дисперсии квадратур всегда ограничены с учетом потерь излучения, а также конечного значения r . При этом уровень сжатия непосредственно связан с параметром сжатия, который в свою очередь определяется мощностью классического поля накачки нелинейного кристалла. Этот уровень принято измерять в дБ по формуле (см. [11])

$$dB = -10 \log_{10} \left[\frac{\Delta X^2}{\Delta X_{vac}^2} \right] = -10 \log_{10} [e^{-2r}], \quad (3.74)$$

для вакуумного состояния. Последнее равенство в (3.74) записано с учетом выражения (3.3). Так, например, величина сжатия в 15 дБ, полученная экспериментально в [12], формально соответствует параметру сжатия $r \approx 1.73$, рассчитанному согласно (3.74).

Потери в схемах со сжатым светом могут быть оценены с помощью метода фиктивных светоделителей. Идея этого метода состоит в том, что в схеме присутствуют фиктивные светоделители, на которых происходит утечка фотонов, а также взаимодействие с оружающей средой, представляемой в виде квантовых мод (осцилляторов), находящихся в вакуумном состоянии. В результате измеряемая дисперсия квадратур (без учета эффективности детекторов) приобретает вид (ср. с [13])

$$\Delta X_{means}^2 = T \Delta X^2 + \frac{1-T}{4}, \quad (3.75)$$

где $\hat{X} = \{\hat{X}_1, \hat{X}_2\}$, T – коэффициент пропускания схемы ($0 \leq T \leq 1$). В идеальном случае $\Delta X_{means}^2 = \Delta X^2$ при $T = 1$. Заметим, что с учетом (3.75) минимальное произведение дисперсий (3.3) становится уже недостижимым.

3.5.2. Генерация одномодового сжатого света

За последние 20 лет эксперименты со сжатым светом претерпели существенный прогресс с учетом новой компонентной базы как линейных, так и нелинейных элементов, допускающих интегральное исполнение на чипе, см., например, [14]. На рис. 3.9 приведена упрощенная схема современного эксперимента по генерации ОСВС [15]. Она состоит из четырех основных блоков. Волоконный лазер формирует рабочую (для ОСВС) длину волны, используемую в схемах с регистрацией ВГ. Его когерентное излучение (состояние $|\alpha\rangle_1$) используется в качестве поля локального осциллятора (опорного генератора) в блоке балансного гомодинного детектора при регистрации ОСВС. Блок генерации второй гармоники (ГВГ) позволяет сформировать накачку на длине волны в 0.775 мкм, используемую затем в блоке СПРС, в котором и происходит формирование ОСВС, характеризуемого состоянием $|\zeta\rangle_2$. Заметим, что как в блоке ГВГ, так и в блоке СПРС используются резонаторы с помещенными внутри квадратично-

нелинейными кристаллами РРКТР (например, периодически поляризованным кристаллом титанил-фосфата калия, КТР). В результате основными факторами, ограничивающими сжатие одной из квадратур, является эффективность преобразования излучения в этих средах. Для теоретических оценок схемы на рис. 3.9 для оптимизированной по фазе дисперсии ΔX^2 одной из квадратур сжатого света используется выражение

$$\Delta X^2 = 1 + T \frac{4\sqrt{P/P_{thr}}}{(1 - \sqrt{P/P_{thr}})^2 + 4\Omega^2}, \quad (3.76)$$

где $T \approx 0.965$ – параметр, учитывающий пропускную способность схемы, $P_{thr} \approx 221$ мВт – пороговая мощность параметрической генерации в нелинейном кристалле, P – мощность накачки, Ω – отношение частоты, на которой измеряется сжатый свет (в диапазоне от единиц до десятков МГц), к потерям в резонаторе с кристаллом СПРСВ. В результате в работе было получено сжатие на уровне -12.3 дБ.

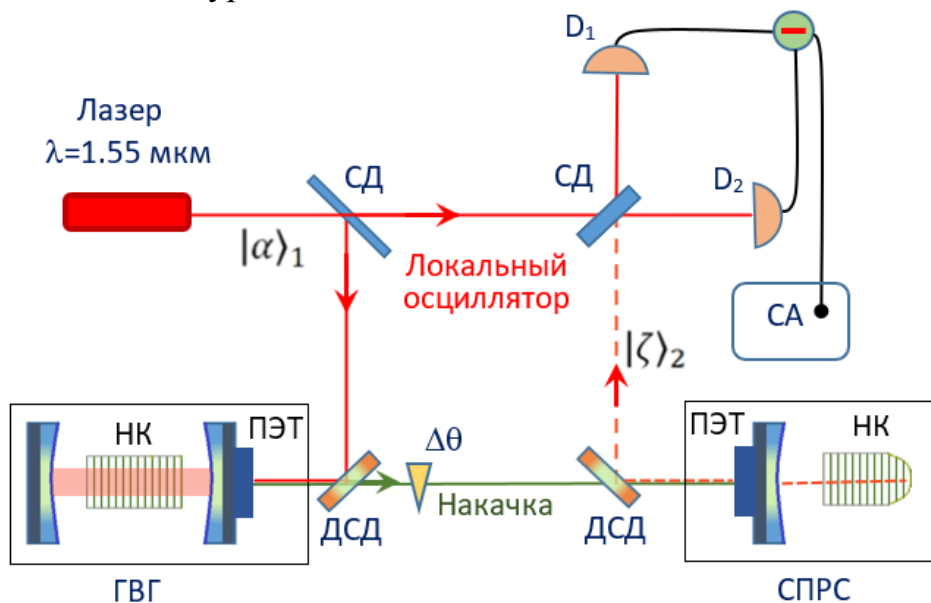


Рис. 3.9. Упрощенная схема генерации и регистрации ОСВС [15]. ГВГ – блок с генерацией второй гармоники, СПРС – блок с СПР, БГД – балансный гомодинный детектор, ДСД – дихроичный светоделитель, СД – полупрозрачный светоделитель, ПЭТ – пьезоэлемент, СА – спектр-анализатор, $\Delta\theta$ – элемент управления фазой накачки, НК – нелинейный кристалл с квадратичной восприимчивостью материала

3.6. Задачи

1. Докажите справедливость соотношения (3.1).
2. Выведите уравнение (3.2).
3. Докажите, что когерентное состояние (3.12) есть решение уравнений (3.10) и (3.11).
4. Докажите справедливость уравнения (3.14).
5. Выведите уравнение (3.31).

6. Вычислите среднее число фотонов $\langle \hat{n} \rangle$ и дисперсию числа фотонов $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle$ в лазерном пучке, используя распределение Пуассона (3.24).

7. Рассмотрите суперпозицию вакуумного и однофотонного состояний, называемую *кубитным состоянием* и определяемую как:

$$|\psi\rangle = C_1|0\rangle + C_2|1\rangle, \quad (3.77)$$

где C_1 – вещественное число, C_2 – комплексное.

1) Каково физическое значение коэффициентов C_1 и C_2 ? Они независимы?

2) Рассмотрите кубит (3.77) как предельное когерентное состояние (3.12) с амплитудой $|\alpha| \ll 1$. Получите коэффициенты C_1 и C_2 для этого случая.

3) Вычислите среднее число фотонов для состояния (3.77).

4) Вычислите дисперсию числа фотонов для состояния (3.77).

5) Предположим, что $C_2 = |C_2|e^{i\theta}$. В чем физический смысл фазы θ ? Как можно получить θ экспериментально?

8. Докажите, что:

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha; \quad (3.78)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \quad (3.79)$$

9. Докажите, что для большого числа фотонов $\langle \hat{n} \rangle$ распределение Пуассона (3.24) можно заменить распределением Гаусса:

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle \hat{n} \rangle}} \exp\left\{-\frac{(n-\langle \hat{n} \rangle)^2}{2\langle \hat{n} \rangle}\right\}. \quad (3.80)$$

10. Вычислите n -функцию для фоковского состояния $|\psi\rangle = |n\rangle$ и постройте ее график для разных n .

11. Убедитесь, что операторы рождения и уничтожения на выходе светоделителя (3.35) и (3.36) удовлетворяют стандартным бозонным соотношениям коммутации:

$$[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = [\hat{d}, \hat{d}^\dagger] = 1, \quad [\hat{c}, \hat{d}^\dagger] = 0. \quad (3.81)$$

12. Докажите свойство оператора сжатия (3.44).

13. Получите формулы (3.60) и (3.61).

14. Получите выражение для коэффициентов (3.54), используя математическое тождество

$$1 + \sum_{m=0}^{\infty} z^m \left(\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right) = (1-z)^{-1/2}, \quad (3.82)$$

а также равенства

$$(2m)!! = 2^m m!, \quad (3.83)$$

$$(2m-1)!! = \frac{1}{2^m} \frac{(2m)!}{m!}, \quad (3.84)$$

15. Найдите n -функцию для ОСВС и изобразите ее в 3D, в координатах квадратур; $Q = |\langle \alpha | \zeta \rangle|^2$.

16. Запишите уравнение Гейзенберга для операторов уничтожения и рождения фотонов процесса СПСР, описываемого (3.72). Решите эти операторные уравнения.

17. Рассмотрим макроскопическую суперпозицию двух когерентных состояний $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$, которые являются двумя различными собственными состояниями оператора уничтожения фотона \hat{a} (3.10). Представим эту суперпозицию в следующем виде:

$$|\Upsilon\rangle = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + e^{i\varphi}|\beta\rangle), \quad (3.85)$$

где \mathcal{N} – нормировочная константа, φ – произвольная фаза. Найдите эту нормировочную константу \mathcal{N} .

18. В литературе состояние (3.85) с $\beta = -\alpha$ называется *состоянием кота Шредингера* [7].

1) Докажите, что два состояния, полученные из (3.85) подстановкой $\beta = -\alpha$, $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ представляют собой четное и нечетное (по отношению к числу фотонов n) состояние кота Шредингера.

2) Найдите математические ожидания квадратур $\langle \Upsilon | \hat{X}_1 | \Upsilon \rangle$, $\langle \Upsilon | \hat{X}_2 | \Upsilon \rangle$.

3) Вычислите среднее число фотонов $\langle \Upsilon | \hat{n} | \Upsilon \rangle$.

4) Найдите дисперсии эрмитовых квадратур $\langle (\Delta \hat{X}_{1,2})^2 \rangle$ в состоянии (3.85) и схематично представьте их на фазовой плоскости как на рис. 3.1. Исследуйте соотношение неопределенностей (2.34) для полученных результатов.

5) Вычислите дисперсию числа фотонов $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle_{\Upsilon}$. Сравните полученные результаты с дисперсией для обычного когерентного состояния (3.23).

6) Вычислите W -функцию для состояния кота Шредингера и постройте ее график.

7) Изобразите состояние кота Шредингера в фазовом пространстве так, как это сделано на рис. 3.1.

4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОГЕРЕНТНОСТИ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ

4.1. Когерентность первого порядка

4.1.1. Степень когерентности классического поля

Понятие оптической когерентности является базовым во всей оптике и затрагивает ее основы. С этим понятием студенты знакомятся еще в школе, поскольку именно там дается элементарное описание явлению интерференции и принципу Юнга. В рамках университетских курсов по классической оптике понятие оптической когерентности обобщается на квантовый случай и развивается с учетом тех источников светового поля, с которыми приходится иметь дело на практике.

Мы начнем с краткого изложения классической (пространственной или поперечной) когерентности излучения первого порядка, см., например, [5]. На рис. 4.1 приведена схема интерференции Юнга на двух щелях. В случае интерферометра Майкельсона и/или Маха–Цендера говорят о временной или продольной когерентности; при этом формальное описание остается таким же.

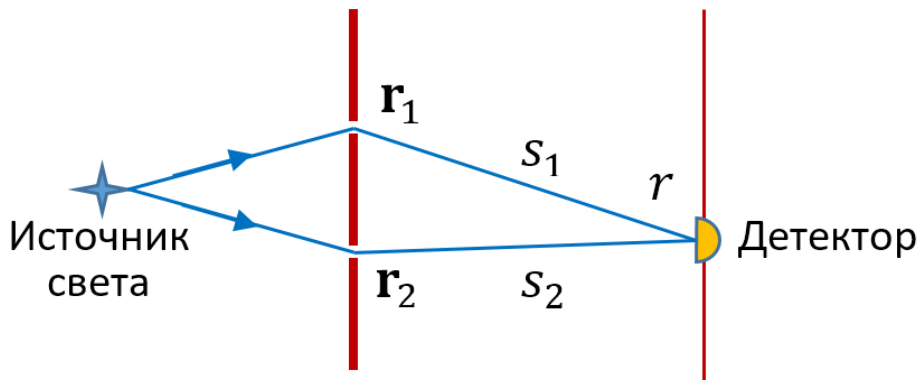


Рис. 4.1. Эскиз стандартной установки для двухщелевого интерференционного эксперимента Юнга в оптике

При определенных условиях на экране появляются интерференционные полосы. Если источник имеет спектральную полосу пропускания $\Delta\omega$, то искажения картины возникают при $\Delta s \leq c/\Delta\omega$, где $\Delta s = |s_1 - s_2|$ – разность хода лучей до точки наблюдения, в которой находится фоточувствительный элемент – детектор, см. рис. 4.1. Величина $\Delta s_{coh} = c/\Delta\omega$ называется длиной когерентности. Величина $\Delta t_{coh} = \Delta s_{coh}/c = 1/\Delta\omega$ называется временем когерентности. Интерференционные полосы будут видны при $\Delta t_{coh}\Delta\omega \simeq 1$.

Полное поле на экране или на детекторе в момент времени t можно представить как линейную суперпозицию полей в более ранние моменты времени $t_1 = t - s_1/c$ и $t_2 = t - s_2/c$, т.е.:

$$E(\mathbf{r}, t) = K_1 E(\mathbf{r}_1, t_1) + K_2 E(\mathbf{r}_2, t_2), \quad (4.1)$$

где $E(\mathbf{r}_i, t_i) = E_0 e^{-i\omega t_i + i\mathbf{k}\mathbf{r}_i + i\varphi}$ – комплексная «часть» поля на экране, поступающее из i -й щели, а величины K_1 и K_2 – комплексные геометрические факторы, зависящие от расстояний s_1 и s_2 , соответственно; E_0 – вещественная амплитуда поля, ω и φ – его частота и фаза. Для простоты мы не рассматриваем здесь эффекты, связанные с поляризацией излучения. Дифракционные эффекты, связанные со щелями, также игнорируются. Оптические детекторы света имеют большое время отклика и способны измерять только среднюю интенсивность света. В результате интенсивность света на детекторе определяется выражением:

$$I(\mathbf{r}) = \langle |E(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle, \quad (4.2)$$

где угловая скобка означает усреднение по времени, которое математически выглядит как:

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (4.3)$$

Согласно эргодической гипотезе среднее по времени эквивалентно среднему по ансамблю. Полагаем, что это среднее является стационарным, т.е. не зависит от выбора начала отсчета времени. Используя (4.1), тогда имеем

$$I(r) = |K_1|^2 \langle |E(r_1, t_1)|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |E(r_2, t_2)|^2 \rangle + 2\text{Re}[K_1^* K_2 \langle E^*(\mathbf{r}_1, t_1) E(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle]. \quad (4.4)$$

Первые два члена представляют интенсивности в точке экрана, связанные с полями от каждой из щелей, т.е.

$$\begin{aligned} I_1 &= |K_1|^2 \langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle, \\ I_2 &= |K_2|^2 \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.5)$$

а последний член (4.4) вызывает интерференцию, которую удобно описывать на основе нормированной функции **взаимной когерентности первого порядка**

$$\gamma^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{|\langle E^*(x_1) E(x_2) \rangle|}{\sqrt{|E(x_1)|^2 |E(x_2)|^2}}, \quad (4.6)$$

где мы, используя стандартные для таких случаев соглашения, обозначили $x_i = (\mathbf{r}_i, t_i)$. Таким образом, можно записать интенсивность, измеренную на экране, в терминах (4.5) и (4.6) как:

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re}[K_1 K_2 \gamma^{(1)}(x_1, x_2)]. \quad (4.7)$$

Если теперь представить комплексные константы $K_i = |K_i| \exp(i\psi_i)$ и в том же виде представить величину $\gamma^{(1)}(x_1, x_2) = |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| \exp(i\Phi_{12})$, тогда вместо (4.7) получаем

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| \cos(\Phi_{12} - \psi), \quad (4.8)$$

где $\psi = \psi_1 - \psi_2$ – разность фаз, возникающая из-за разности длин пути (предполагается, что она меньше длины когерентности). Интерференция имеет место при $|\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| \neq 0$. Различают три предельных случая для когерентности первого порядка:

$$\begin{aligned} |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| &= 1 \text{ – полная когерентность;} \\ 0 < |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| < 1 &\text{ – частичная когерентность;} \\ |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| &= 0 \text{ – полная некогерентность.} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Удобно ввести определение видности интерференционных полос, данное Рэлеем:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (4.10)$$

где

$$I_{max/min} = I_1 + I_2 \pm 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| \quad (4.11)$$

есть максимальная и минимальная интенсивности на экране, соответственно, так что

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)|}{I_1 + I_2}. \quad (4.12)$$

Ясно, что для случая полной когерентности видимость (или контрастность) полос должна быть максимальна:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}. \quad (4.13)$$

Соответственно, при полной некогерентности $V = 0$. Далее следует отметить важное свойство: $|\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| = 1$, если числитель в (4.6) факторизуется, то есть его можно представить в виде

$$\langle E^*(x_1)E(x_2) \rangle = \langle E^*(x_1) \rangle \langle E(x_2) \rangle. \quad (4.14)$$

Таким образом, свойство факторизации можно использовать как критерий полной оптической когерентности. Квантовый аналог этого критерия, факторизация среднего значения произведения полевых операторов, приведет, как мы увидим, к критерию полной когерентности в квантовомеханическом световом поле.

Теперь рассмотрим некоторые примеры классических функций когерентности первого порядка. Начнем с временной когерентности стационарных световых полей в фиксированной точке пространства. Пусть, например, монохроматическое световое поле, распространяющееся в направлении Z , задается в точке z в моменты времени t и $t + \tau$ как

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 e^{i(kz - \omega t)}, \\ E(z, t + \tau) &= E_0 e^{i(kz - \omega(t + \tau))}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Это и есть величины $E(x_1)$ и $E(x_2)$, используя которые получаем

$$\langle E^*(z, t)E(z, t + \tau) \rangle = E_0^2 e^{-i\omega\tau}. \quad (4.16)$$

Величина в левой части (4.16) называется автокорреляционной функцией. Опуская пространственную переменную, ее часто записывают как $\langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle$. В этом случае

$$\gamma^{(1)}(x_1, x_2) = \gamma^{(1)}(\tau) = \gamma^{(1)*}(-\tau) = e^{-i\omega\tau} \quad (4.17)$$

и, следовательно, $|\gamma^{(1)}(\tau)| = 1$. Это означает, что мы имеем полную временную когерентность.

Но абсолютно идеально монохроматических источников света не существует. Более реалистичная модель «монохроматического» источника должна учитывать случайные процессы, посредством которых свет излучается при переходе возбужденных атомов в основное состояние в источнике излучения. Эти «монохроматические» источники будут излучать свет в виде цугов конечной длины, причем цуги разделены случайным изменением фазы. Среднее время цуга волны τ_0 данного источника называется временем когерентности источника. Это время когерентности обратно пропорционально естественной ширине спектральных линий излучающих атомов в источнике. Тогда мы можем определить длину когерентности l_{coh} цуга волн просто как $l_{coh} = c\tau_0$. Реалистичной моделью частично когерентного света является модель излучения атомов, лоренцевский спектр которого уширен столкновениями и имеет максимум на частоте ω_0 . В таком случае автокорреляционная функция (при условии распространения вдоль направления Z) вычисляется как [5]:

$$\langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle = E_0^2 e^{-i\omega_0\tau - |\tau|/\tau_0}, \quad (4.18)$$

где τ_0 можно интерпретировать как среднее время между столкновениями. Источник излучения с функцией автокорреляции (4.18) известен как хаотический. Формула (4.18) приводит к следующему выражению:

$$\gamma^{(1)}(\tau) = e^{-i\omega_0\tau - |\tau|/\tau_0}. \quad (4.19)$$

Из (4.19) видно, что $|\gamma^{(1)}(\tau)| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, т.е. пучок света становится все менее когерентным с увеличением временной задержки. Физически увеличение τ связано с уменьшением среднего времени между столкновениями, что ведет к уширению спектра. В условиях, когда $|\tau| \ll \tau_0$, можно полагать, что достигается полная когерентность.

4.1.2. Степень когерентности квантованного поля

Рассмотрим теперь интерференционный эксперимент Юнга с точки зрения квантовой когерентности первого порядка, см. рис. 4.1. Предполагаем, что источник света является монохроматическим, и что отверстия имеют размеры порядка длины волны света. Последнее предположение позволяет пренебречь эффектами дифракции и предположить, что отверстия являются точечными источниками сферических волн, а поле на экране

(или на детекторе) в точке \mathbf{r} в момент времени t – сумма (сферических) волн от каждого отверстия (ср. с (2.17)):

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = f(r) [\hat{a}_1 e^{iks_1} + \hat{a}_2 e^{iks_2}] e^{-i\omega t}, \quad (4.20)$$

где

$$f(r) = i \left[\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0(4\pi R)} \right]^{1/2} \frac{1}{r}. \quad (4.21)$$

R – радиус области, по которой производится нормировка (радиус объема нормировки), s_1 и s_2 – расстояния от отверстий до экрана, а величина $r = |\mathbf{r}|$, возникающая в (4.21), – результат приближения $s_1 \approx s_2 = r$. Также полагаем $k = |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$ – величина волновых чисел излучения от каждого из отверстий. Операторы уничтожения \hat{a}_1 и \hat{a}_2 связаны с радиальными модами поля для фотонов, испускаемых из отверстий 1 и 2, соответственно. Средняя интенсивность на экране определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) &= \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)\} = \\ &= |f(r)|^2 \{ \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1) + \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2) + 2|\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2)| \cos \Phi \}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где $\hat{\rho}$ – оператор плотности поля,

$$\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2) = |\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2)| e^{i\psi} \quad (4.23)$$

и

$$\Phi = k(s_1 - s_2) + \psi \quad (4.24)$$

есть фаза интерференции. Максимальная видимость интерференционных полос наблюдается при $\Phi = 2\pi m$, где m – целое число, и падает как $1/r^2$ с увеличением расстояния между детектором и центральной полосой. Заметим, что если пренебречь уменьшением видности полос при удалении от центра экрана, то пучок света, падающий на отверстия, можно аппроксимировать плоской волной.

Для квантового излучения нормированная функции *взаимной когерентности первого порядка* имеет следующий вид (ср. с (4.6)):

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{|\langle \hat{E}^{(-)}(x_1)\hat{E}^{(+)}(x_2) \rangle|}{\sqrt{\langle \hat{E}^{(-)}(x_1)\hat{E}^{(+)}(x_1) \rangle \langle \hat{E}^{(-)}(x_2)\hat{E}^{(+)}(x_2) \rangle}} \quad (4.25)$$

Здесь, как и в (4.22), подразумевается квантовомеханическое усреднение по состояниям поля. Заметим, что если классическая фаза полей не определена, то по ней также проводится усреднение, как в классическом случае.

Рассмотрим применение данной теории к двум предельным случаям. Полагаем, что поле находится в чистом состоянии. В первом случае считаем, что моды a_1 и a_2 находятся в когерентных состояниях $|\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle$, и их относительная фаза ψ хорошо определена, т.е. они получены от одного источника лазерного излучения, см. рис. 4.1. Тогда среднюю интенсивность света после прохождения через отверстия можно записать как

$$I(\mathbf{r}, t) = |f(\mathbf{r})|^2 \{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + 2|\alpha_1^* \alpha_2| \cos \Phi \}, \quad (4.26)$$

что приводит к результату $g^{(1)}(x_1, x_1) = 1$ и позволяет наблюдать интерференционные полосы с видимостью, равной единице.

Если же моды a_1 и a_2 независимы, их относительная фаза ψ не определена. Тогда $\cos \Phi \approx 0$, и интерференция отсутствует. Как уже отмечалось выше, такая ситуация может быть даже с двумя когерентными, но не сфазированными между собой источниками излучения. Но самое замечательное заключается в том, что если общее чистое квантовое состояние есть $|n_1\rangle|n_2\rangle$, то можно показать, что $g^{(1)}(x_1, x_2) = 0$. Физически это связано с тем, что для фоковских состояний фаза не определена. Таким образом, даже степень когерентности первого порядка дает важную информацию о неклассическом поведении интерферирующих пучков светового поля.

4.2. Когерентность второго порядка

4.2.1. Эксперимент Хэнбери Брауна–Твисса

В 1950-х годах Хэнбери Браун и Твисс [5] разработали новый тип корреляционного эксперимента, который включал корреляцию интенсивностей (числа фотонов), а не полей. Схема эксперимента показана на рис. 4.2. Детекторы D_1 и D_2 находятся на одинаковом расстоянии от светоделителя. Эта установка измеряет частоту совпадений с задержкой, когда один из детекторов регистрирует фотоны в момент времени t , а другой – в момент $t + \tau$. Если временная задержка, τ , меньше времени когерентности, τ_0 , то можно определить информацию о статистике светового излучения, попадающего на светоделитель.

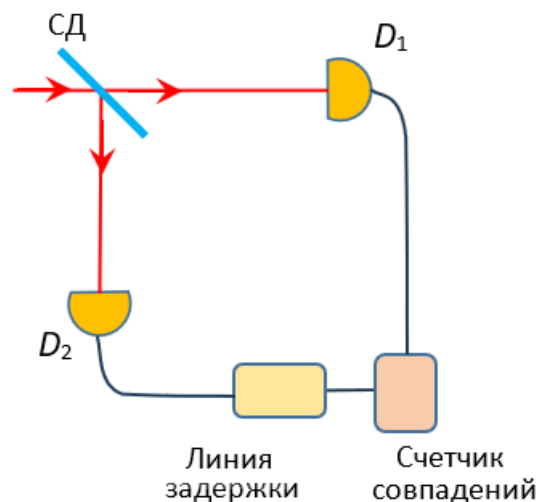


Рис. 4.2. Схема установки для эксперимента Хэнбери Брауна и Твисса

Скорость подсчета совпадений пропорциональна среднему времени или ансамблю, среднее значение равно

$$C(t, t + \tau) = \langle I(t)I(t + \tau) \rangle, \quad (4.27)$$

где $I(t)$ и $I(t + \tau)$ – мгновенные интенсивности на двух детекторах (здесь это классические величины). Если предположить, что поля стационарны, то среднее является функцией только от t . Если среднее значение интенсивности на каждом детекторе равно $\langle I(t) \rangle$, то вероятность получения отсчета совпадений с временной задержкой τ равна

$$\gamma^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{\langle E^*(t)E^*(t + \tau)E(t + \tau)E(t) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle^2}. \quad (4.28)$$

Это классическая функция когерентности второго порядка. Если детекторы находятся на разных расстояниях от светоделиителя, функция когерентности второго порядка может быть обобщена до

$$\gamma^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = \frac{\langle I(x_1)I(x_2) \rangle}{\langle I(x_1) \rangle \langle I(x_2) \rangle} = \frac{\langle E^*(x_1)E^*(x_2)E(x_2)E(x_1) \rangle}{\langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle}. \quad (4.29)$$

Световой источник обладает когерентностью второго порядка, если $\gamma^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = 1$. В частности, это так, если выполняется условие факторизации

$$\langle E^*(x_1)E^*(x_2)E(x_2)E(x_1) \rangle = \langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle. \quad (4.30)$$

Для плоской волны, распространяющейся в направлении Z согласно уравнению (4.15), легко показать, что

$$\langle E^*(t)E^*(t + \tau)E(t + \tau)E(t) \rangle = E_0^4 \quad (4.31)$$

и, таким образом, $\gamma^{(2)}(\tau) = 1$. Для любого светового пучка постоянной, нефлуктуирующей интенсивности имеем $I(t) = I(t + \tau) = I_0$, $\gamma^{(2)}(\tau) = 1$.

Можно показать, что для источника светового излучения, содержащего большое число независимо излучающих атомов, которые сталкиваются между собой, функции когерентности первого и второго порядка связаны соотношением

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + |\gamma^{(1)}(\tau)|^2, \quad (4.32)$$

справедливым для всех разновидностей хаотического света. Действительно, поскольку $0 \leq |\gamma^{(1)}(\tau)| \leq 1$, то из (4.32) следует, что $1 \leq |\gamma^{(2)}(\tau)| \leq 2$. Комбинируя (4.32) и (4.19) для источников с лоренцевски уширенным спектром имеем

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2|\tau|/\tau_0}. \quad (4.33)$$

Отсюда видно, что при $\tau \rightarrow \infty$, $\gamma^{(2)}(\tau) \rightarrow 1$.

Однако при нулевой задержке $\tau \rightarrow 0$, $\gamma^{(2)}(0) = 2$, что есть хорошо известное значение степени когерентности второго порядка для любого источника хаотического света. Данный результат имеет простую интерпретацию. Если световое излучение, падающее на один из детекторов (например, D_1), не зависит от света, падающего на детектор D_2 , то должна наблюдаться равномерная частота совпадений, не зависящая от t . Именно этого ожидали Хэнбери Браун и Твисс [5].

4.2.2. Степень когерентности второго порядка квантового поля

В общем случае определение степени когерентности второго порядка достаточно громоздко, см., например, [5]. Ограничимся степенью когерентности второго порядка $g^{(2)}$ квантованного поля излучения в заданной пространственной точке. Она зависит только от разницы времен $\tau = t_2 - t_1$ и определяется как:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(t) \hat{E}^{(-)}(t + \tau) \hat{E}^{(+)}(t + \tau) \hat{E}^{(+)}(t) \rangle}{\langle \hat{E}^{(-)}(t) \hat{E}^{(+)}(t) \rangle \langle \hat{E}^{(-)}(t + \tau) \hat{E}^{(+)}(t + \tau) \rangle}. \quad (4.34)$$

Выражение (4.34) интерпретируется как условная вероятность того, что если фотон обнаружен в момент времени t , то он также будет обнаружен в момент $t + \tau$.

Для одномодового поля, описываемого выражением (2.17), $g^{(2)}(\tau)$ сводится к виду

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} = \frac{\langle \hat{n}(\hat{n} - 1) \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} = 1 + \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}, \quad (4.35)$$

не зависящему от τ .

Для поля в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$ получаем, что

$$g^{(2)}(\tau) = 1, \quad (4.36)$$

и, тем самым, фотоны прибывают случайно в соответствии с распределением Пуассона. Таким образом, квантовое световое поле, находящееся в когерентном состоянии, обладает не только когерентностью в первом, но и во втором порядке.

Одномодовый тепловой источник излучения (все остальные моды отфильтрованы), позволяет получить

$$g^{(2)}(\tau) = 2, \quad (4.37)$$

что, по сути, свидетельствует о хаотической природе такого источника; $1 \leq g^{(2)}(\tau) \leq 2$. Для света с лоренцевским профилем и когерентной функции первого порядка

$$g^{(1)}(\tau) = e^{-i\omega_0\tau - |\tau|/\tau_0} \quad (4.38)$$

мы имеем

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2|\tau|/\tau_0}, \quad (4.39)$$

что соответствует классическому случаю. А именно, при $|\tau| \ll \tau_0$ вероятность получения двух отсчетов фотонов за время $|\tau|$ велика по сравнению со случайным событием. Для случая нулевой задержки, $g^{(2)}(0) = 2$, $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$, что характеризует группировку фотонов.

В квантовой оптике существуют неклассические состояния, для которых $g^{(2)}(\tau) < 0$, что определяет так называемую **антигруппировку фотонов**, которая обладает субпуассоновской статистикой, подчиняющейся условию $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle < \langle \hat{n} \rangle$. В этом случае фотоны, как правило, прибывают

равномерно распределёнными во времени. В частности, для источника света, находящегося в фокковском состоянии $|n\rangle$, дисперсия числа фотонов $\langle(\Delta \hat{n})^2\rangle = 0$, и из (4.35) следует, что

$$g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 0,1; \\ 1 - \frac{1}{n}, & n \geq 2. \end{cases} \quad (4.40)$$

Тот факт, что $g^{(2)}(0)$ принимает классически запрещенные значения, может быть интерпретирован как квантово-механическое нарушение неравенства Коши.

Выражение (4.40) имеет важный практический смысл. Оно позволяет идентифицировать однофотонные источники излучения, для которых должно выполняться $g^{(2)}(0) = 0$. Разумеется, на практике такого не происходит в силу целого ряда причин, которые в основном связаны с эффектами декогеренции, происходящими в таких источниках излучения. Однако если в эксперименте удастся получить $g^{(2)}(0) < 1/2$, то такой источник света можно полагать приближенным к однофотонному. Действительно, в условиях испускания двух фотонов $n = 2$ из (4.40) имеем $g^{(2)}(0) = 1/2$, что определяет верхнюю границу степени когерентности второго порядка при создании современных однофотонных источников излучения [16].

4.3. Задачи

1. Докажите, что для источника света, находящегося в двухмодовом когерентном состоянии $|\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle$ степень когерентности первого порядка $g^{(1)}(x_1, x_1) = 1$.

2. Докажите, что для источника света, находящегося в двухмодовом фокковском состоянии $|n_1\rangle|n_2\rangle$ степень когерентности первого порядка $g^{(1)}(x_1, x_1) = 0$.

3. Чему равна степень когерентности $g^{(1)}(x_1, x_1)$ для однофотонного кубита $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|1\rangle_2 + e^{i\varphi}|1\rangle_1|0\rangle_2)$, где φ – фаза.

4. Рассмотрим тепловое излучение при температуре T , обладающее вероятностью теплового возбуждения моды на n -й уровень в виде

$$P_n = \frac{e^{-\beta n \hbar \omega}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n \hbar \omega}}, \quad (4.41)$$

где $\beta = 1/k_B T$, k_B – постоянная Больцмана. Доказать, что оператор плотности для теплового состояния может быть задан в виде

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle\langle n| = (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n \hbar \omega} |n\rangle\langle n|. \quad (4.42)$$

5. Используя выражение выше и определение для средних, доказать, что

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle \hat{n} \rangle^n}{(1 + \langle \hat{n} \rangle)^{n+1}} |n\rangle\langle n|, \quad (4.43)$$

где $\langle \hat{n} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a})$.

6. Доказать, что для теплового источника $g^{(2)}(0) = 2$.

5. КВАНТОВЫЕ ЗАПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СВЕТА

5.1. Невырожденное СПРС

Рассмотрим параметрический процесс, который в квантовой оптике описывается гамильтонианом взаимодействия сигнального и холостого фотонов в одномодовом приближении в виде:

$$\hat{H}_I = i\hbar\chi\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger + \text{э. с.}, \quad (5.1)$$

где $\hat{a}_{s(i)}$ – оператор уничтожения фотонов сигнального (холостого) поля, а χ – параметр, связанный с классической оптической накачкой.

В представлении Гейзенберга эволюция операторов уничтожения выглядит в виде преобразования Боголюбова:

$$\begin{cases} \hat{a}_s(t) = (\mu\hat{a}_s + \nu\hat{a}_i^\dagger)e^{-i\omega t}, \\ \hat{a}_i(t) = (\mu\hat{a}_i + \nu\hat{a}_s^\dagger)e^{-i\omega t}, \end{cases} \quad (5.2)$$

где

$$\mu = \cosh|\chi|t, \quad \nu = \frac{\chi}{|\chi|} \sinh|\chi|t. \quad (5.3)$$

Приведенные выше выражения описывают процесс параметрического усиления с коэффициентом усиления, равным по амплитуде μ . Слагаемое $\nu\hat{a}_i^\dagger$ в первом уравнении (5.2) порождает фотон «холостого» поля. Аналогичный смысл имеет слагаемое $\nu\hat{a}_s^\dagger$ во втором уравнении (5.2) – оно порождает фотон сигнального поля. Квантовое состояние, соответствующее гамильтониану (5.1), эволюционирует в виде

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle, \quad (5.4)$$

где

$$\hat{U}(t) = \exp\{-i\hat{H}_I t/\hbar\} = \exp\{\eta\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger - \text{э. с.}\}, \quad \eta \equiv \chi t. \quad (5.5)$$

Состояние (5.4) – двухмодовое сжатое состояние, и для генерации больших сжатий оно обычно работает в режиме $|\eta| \gg 1$. Это режим параметрического усилителя с высоким коэффициентом усиления. Однако для генерации двухфотонного состояния мы работаем в режиме низкого усиления, когда $\mu \approx 1$ или $|\eta| \ll 1$. Тогда (5.4) можно приближенно представить в виде

$$|\Psi(t)\rangle \approx \left(1 - \frac{|\eta|^2}{2}\right)|0\rangle + \eta|1_s, 1_i\rangle + \eta^2|2_s, 2_i\rangle + \dots, \quad (5.6)$$

где мы опустили члены выше второго порядка по η и приняли в качестве начального состояния $|\Psi(0)\rangle$ вакуумное состояние. Поскольку $|\eta| \ll 1$, первый нетривиальный вклад в уравнении (5.6) для фотодетектирования вносит двухфотонное состояние $|1_s, 1_i\rangle$. Хотя вакуумное состояние в уравнении (5.6) не дает прямого вклада в фотодетектирование, оно играет важную роль в сохранении двухфотонной фазы и создании запутанности фо-

тонов. Из уравнения (5.6) видно также, что $|\eta|^2$ – это просто вероятность преобразования фотонов накачки в фотоны более низкой частоты. Генерация пар случайна, поэтому вероятность генерации двух пар пропорциональна $|\eta|^4$ (последний член в уравнении (5.6), далее его отбрасываем).

5.2. Эксперимент Хонга–Оу–Манделя (ХОМ)

5.2.1. Квантовая интерференция фотонов

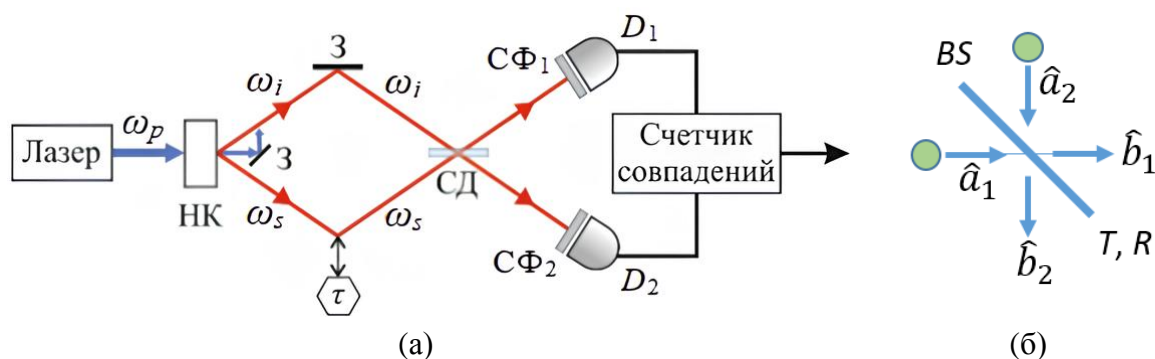


Рис. 5.1. а) Схема эксперимента Хонга–Оу–Манделя (ХОМ) интерференции двух фотонов на идеальном (без потерь) светоделителе. НК – квадратично-нелинейный кристалл бета-бората бария; ω_p , ω_s и ω_i – частоты фотонов накачки, сигнального и холостого; З – зеркала, СД – светоделитель, СФ_{1,2} – спектральные фильтры, D_{1,2} – детекторы, τ – разность времени хода сигнального и холостого фотонов; б) физика рассеяния двух фотонов на светоделителе, T и R обозначают коэффициенты пропускания и отражения частиц, соответственно

Судя по структуре (рис. 5.1), интерферометр Хонга–Оу–Манделя вряд ли можно назвать интерферометром в традиционном смысле, поскольку волны сначала расщепляются, а затем рекомбинируют. Скорее, он оперирует с парой фотонов, поступающих на светоделитель без потерь из двух отдельных входных портов светоделителя. Тем не менее, интерференционный эффект в этой, казалось бы, простой геометрии действительно присутствует.

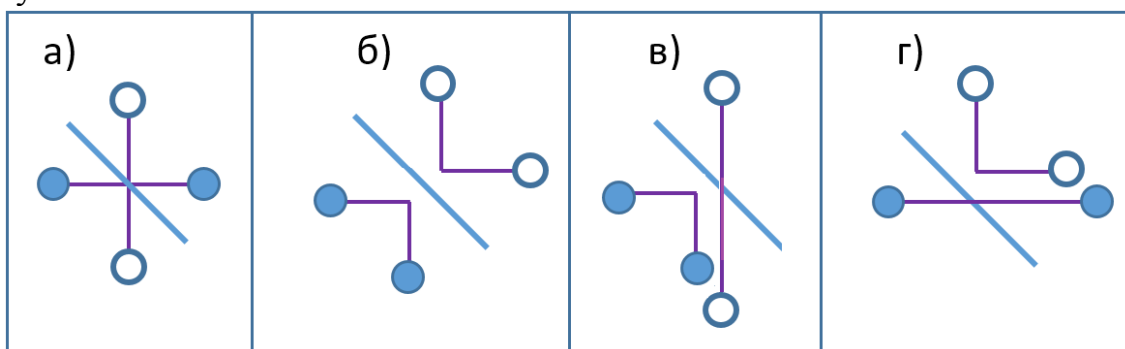


Рис. 5.2. Возможные исходы, возникающие на выходе интерферометра Хонга–Оу–Манделя

Из-за участия двух фотонов на выходе светоделителя есть четыре возможности: оба пропускаются (рис. 5.2(а)), оба отражаются (рис. 5.2(б))

и один пропускается, а другой отражается (рис. 5.2(в) и рис. 5.2(г)). Первые две возможности неразличимы, что приводит к сложению амплитуд. Однако из-за разности фаз для случаев (в) и (г) возникает разность амплитуд светового поля между прошедшим и отраженным полями (этот фазовый сдвиг является универсальным и не зависит от специфики светоделителя). Это приводит к деструктивной интерференции, и эти два случая полностью компенсируют друг друга, когда их амплитуды одинаковы. Этот эффект был впервые обнаружен Хонгом, Оу и Манделем в 1987 г., см. [17]. Если два фотона, попадающих в светоделитель, имеют одинаковую частоту, одинаковую поляризацию и принадлежат одной пространственной моде, мы можем обозначить их операторы уничтожения как \hat{a}_1 и \hat{a}_2 , соответственно. Они соответствуют двум входным модам светоделителя (см. рис. 5.1). Тогда состояние на входе будет:

$$|\Psi\rangle_{in} = |1_{a1}, 1_{a2}\rangle. \quad (5.7)$$

Обозначим моды на выходе из светоделителя как \hat{b}_1 и \hat{b}_2 ; они связаны с модами \hat{a}_1 и \hat{a}_2 как

$$\begin{cases} \hat{b}_1 = \sqrt{T}\hat{a}_1 + \sqrt{R}\hat{a}_2, \\ \hat{b}_2 = \sqrt{T}\hat{a}_2 - \sqrt{R}\hat{a}_1, \end{cases} \quad (5.8)$$

где T и R (≥ 0) – коэффициенты пропускания и отражения светоделителя соответственно, такие, что $T + R = 1$ (в общем случае коэффициенты в уравнении (5.8) – комплексные числа). В результате вероятность P_{12} обнаружения по одному фотону на выходе из светоделителя определяется выражением

$$P_{12} = {}_{in}\langle\Psi|\hat{b}_1^+\hat{b}_2^+\hat{b}_2\hat{b}_1|\Psi\rangle_{in}. \quad (5.9)$$

Используя состояние (5.7) и операторы (5.8) для P_{12} нетрудно получить

$$P_{12} = (T - R)^2. \quad (5.10)$$

При $T = R = 1/2$ получается, что $P_{12} = 0$. Это означает полное отсутствие двухфотонной интерференции.

Заметим, что при этом состоянии на выходе светоделителя для входного состояния (5.7) имеет вид:

$$|\Psi\rangle_{out} = (T - R)|1_{b1}, 1_{b2}\rangle + \sqrt{2TR}(|2_{b1}, 0_{b2}\rangle - |0_{b1}, 2_{b2}\rangle), \quad (5.11)$$

где первое слагаемое соответствует ситуациям на рис. 5.2(а) и рис. 5.2(б), а два других слагаемых соответствуют рис. 5.2(в) и рис. 5.2(г). Для светоделителя 50:50 мы получаем максимально запутанное двухфотонное состояние:

$$|\Psi\rangle_{out} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,0\rangle - |0,2\rangle). \quad (5.12)$$

В нем слагаемое вида $|1,1\rangle$ отсутствует вовсе.

Таким образом, из (5.12) следует, что вероятности зарегистрировать по одному фотону на каждом из детекторов $P(1,1) = |\langle 1,1|\psi_{out}\rangle|^2$, а также два фотона $P(2,0) = P(0,2) = |\langle 2,0|\psi_{out}\rangle|^2$ на каком либо из детекторов, соответственно, даются выражениями:

$$P_{11} \equiv P(1,1) = 0; P_{20} \equiv P(2,0) = P(0,2) = \frac{1}{2}. \quad (5.13)$$

Выражения (5.13) определяют эффект группировки фотонов, т.е. тенденцию фотонов собираться по два по обеим сторонам светоделителя, что указывает на бозонную природу фотонов. Это означает, что волновая функция системы из двух фотонов должна быть симметричной относительно их перестановок. Однако симметрия относится к глобальной волновой функции. Если мы будем управлять некоторыми другими степенями свободы фотонов, скажем, поляризацией, таким образом, что состояние поляризации фотонов будет антисимметричным, два фотона в светоделителе будут вести себя как фермионы и двигаться в разных направлениях, чтобы поддерживать глобальную симметрию волновой функции.

Эксперимент по наблюдению эффекта ХОМ основан на процессе спонтанного параметрического рассеяния света в нелинейном кристалле, который позволяет получить состояние $|\Psi(t)\rangle \simeq |\Psi\rangle_{in} = |1_{a1}, 1_{a2}\rangle$. В ходе СПРС фотон сильной лазерной накачки с частотой ω_p распадается на два фотона (т.н. бифотоны): сигнальный с частотой ω_s и холостой с частотой ω_i . В общем случае эти частоты имеют распределение, отличное от дельта-функции: в стационарном случае частоты связаны между собой соотношением $\bar{\omega}_s + \bar{\omega}_i = \omega_p$. Далее фотоны разводятся по двум плечам интерферометра, см. рис. 5.1(а). Разность времени хода бифотонов, τ , может быть вызвана различными физическими процессами: например, удлинением оптического волокна, помещенного в нагретую/охлажденную среду, сдвигом элементов установки и др. Если принять время хода холостого фотона за эталон, то рассматривается только изменение времени хода сигнального фотона τ . Дисперсия среды, в которой распространяется бифотонное поле, также приводит к временному сдвигу τ . Наконец, сама интерферометрическая схема тоже может вводить некоторое смещение и обусловленную им задержку τ_0 . После смешения сигнального и холостого фотонов на светоделителе СД, фотоны регистрируются детекторами в режиме счета числа совместных срабатываний. Иными словами, регистрируется вероятность $R_c(\tau)$ события, при котором одновременно на два детектора придет по одному фотону – квантовое состояние $|1,1\rangle$. Минимум функции $R_c(\tau)$, известный в литературе как “провал” ХОМ и образующийся при $\tau = 0$, как раз связывают с эффектом ХОМ. При этом форма антикорреляционного “провала” соответствует вдвое сжатой и перевернутой огибающей корреляционной функции первого по интенсивности (второго по полю) порядка $g^{(1)}(\tau)$:

$$R_c \sim 1 - g^{(1)}(2\tau), \quad (5.14)$$

которая связана теоремой Винера–Хинчина со спектральной плотностью поля. В важном с точки зрения эксперимента случае использования узкополосных фильтров¹, установленных перед детекторами, спектральное пропускание которых описывается гауссовской функцией с шириной σ , форма “провала” определяется этой гауссоидой, однако она все равно оказывается в $\sqrt{2}$ раз уже, чем соответствующая корреляционная функция $g^{(1)}(\tau)$:

$$R_c \sim 1 - \frac{1}{2\pi} \int e^{-\frac{\Omega^2}{4\sigma^2}} \cos[\Omega\tau] d\Omega. \quad (5.15)$$

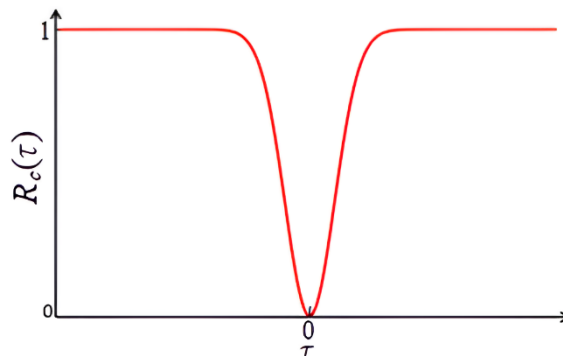


Рис. 5.3. Качественная зависимость идеального счета совпадений R_c как функции от временной задержки τ для эксперимента Хонга–Оу–Манделя $R_c(\tau)$

Здесь $\Omega = \omega - \omega_0$ – частотная отстройка от центральной частоты спектра СПР ω_0 в вырожденном режиме ($2\omega_0 = \omega_p$). На рис. 5.3 приведен характерный ход кривой R_c , определяющей счет однофотонных совпадений. При $\tau = 0$, т.е. когда фотоны приходят на светоделитель одновременно, $R_c = 0$. Это означает, что реализуются случаи, приведенные на рис. 5.2(в) и рис. 5.2(г). По мере увеличения задержки между падающими на светоделитель фотонами, значение R_c увеличивается, и при определенных значениях проходящие светоделитель фотоны становятся полностью различимыми.

5.2.2. Классический предел эффекта ХОМ

Для полноты понимания поведения “провала” ХОМ рассмотрим тот же эксперимент с фотонами на входе на светоделитель, полагая их полностью классическими (различимыми) частицами.

Для наглядности представим, что оба фотона на рис. 5.2(б) есть классические частицы, одновременно падающие с разных сторон на светоделитель, который с некоторой *классической* вероятностью отражает или про-

¹ Имеется ввиду случай, когда спектр фильтра уже, чем спектр СПР.

пускает по отдельности эти частицы. В этом случае, если BS идеально полупрозрачный, то возможны *четыре* равновероятных исхода такого эксперимента: каждый из фотонов отразился на BS, каждый из фотонов прошел BS, и наконец, по два фотона отразились от BS, и по два фотона его прошли. В результате имеем следующие выражения для классических вероятностей (ср. с (5.13)):

$$p_{11} = \frac{1}{2}; p_{20} = \frac{1}{4}. \quad (5.16)$$

Как видно из (5.16) и рис. 5.2(в), классическая вероятность p_{11} события, при котором по одному фотону (не важно, какому) окажется на каждом из детекторов, есть сумма вероятностей их прохождения и отражения по отдельности, и она больше тех, что соответствуют регистрации двухфотонных событий p_{20} . Таким образом, полная неразличимость квантовых частиц, позволяющая оперировать с амплитудами квантовых вероятностей, а не с самими вероятностями, приводят к “провалу” в видности интерференционной картины.

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХУРОВНЕВОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ С КЛАССИЧЕСКИМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

В этом разделе будет разобрана проблема взаимодействия света с веществом в полуклассическом пределе для идеальной двухуровневой системы, т.е. различные механизмы уширения спектральных линий не будут учтены [10].

6.1. Общее описание взаимодействия квантовой двухуровневой системы с классическим полем

Во многих приложениях квантовой оптики и квантовой информации центральную роль играет простейшая *двухуровневая система (ДУС)*, обладающая хорошо различимыми в эксперименте энергетическими состояниями: основным ($|g\rangle$) и возбужденным ($|e\rangle$) (рис. 6.1). Примечательно, что ДУС можно создать на основе так называемых искусственных атомов – квантовых точек, сверхпроводящих цепей и т.д. Состояния $|e\rangle$ и $|g\rangle$ можно представить в виде векторов:

$$|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

где $|e\rangle$ и $|g\rangle$ образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве:

$$\langle g|g\rangle = \langle e|e\rangle = 1, \quad \langle g|e\rangle = \langle e|g\rangle = 0. \quad (6.2)$$

Предположим, что $E_g = \hbar\omega_g$ и $E_e = \hbar\omega_e > E_g$ – два экспериментально различимых собственных значения гамильтониана ДУС \hat{H}_{TLS} :

$$\hat{H}_{TLS}|e\rangle = \hbar\omega_e|e\rangle; \quad (6.3)$$

$$\hat{H}_{TLS}|g\rangle = \hbar\omega_g|g\rangle, \quad (6.4)$$

где H_{TLS} записывается в следующем виде:

$$\hat{H}_{TLS} = \hbar\omega_g|g\rangle\langle g| + \hbar\omega_e|e\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} \hbar\omega_e & 0 \\ 0 & \hbar\omega_g \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Здесь предполагается, что \hat{H}_{TLS} не зависит от времени. Частота перехода $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ обозначается как $\omega_0 \equiv \omega_e - \omega_g$ (см. рис. 6.1).

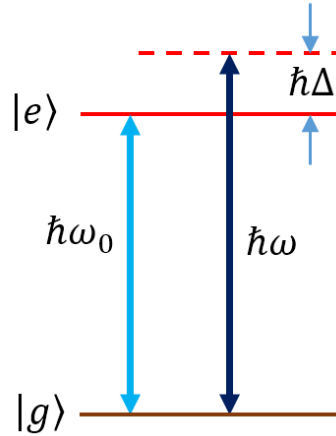


Рис. 6.1. Схематическое изображение уровней энергии ДУС, взаимодействующей с возбуждающим полем с угловой частотой ω . ω_0 – резонансная угловая частота перехода между уровнями, $\Delta = \omega - \omega_0$ – отстройка по частоте. Для многих важных приложений можно считать, что отстройка невелика, так что выполняются неравенства $|\Delta| \ll \omega_0, \omega$.

Рассмотрим теперь взаимодействие ДУС с классическим монохроматическим пучком света в дипольном приближении (2.28), в котором электрическое поле представляется в следующей форме (ср. с (3.18)):

$$E(t) = \frac{1}{2}(\mathcal{E}e^{i\omega t} - \mathcal{E}^*e^{-i\omega t}) = |\mathcal{E}| \cos(\omega t - \theta), \quad (6.6)$$

где \mathcal{E} , ω и θ – амплитуда поля, угловая частота и начальная фаза, соответственно. Затем можно рассмотреть случай действительной амплитуды \mathcal{E} , который возникает при $\theta = 0$. В уравнении (6.6) можно опустить поляризацию, если предположить, что основные состояния ДУС удовлетворяют правилам отбора.

Запишем гамильтониан ДУС, взаимодействующей с классическим э.м. полем, в виде:

$$\hat{H} = \hat{H}_{TLS} + \hat{H}_I(t), \quad (6.7)$$

где $\hat{H}_I(t)$ – часть гамильтониана, отвечающая за взаимодействие, которую в дипольном приближении можно представить в виде [10]:

$$\hat{H}_I(t) = -(\wp_{ge}|g\rangle\langle e| + \wp_{eg}|e\rangle\langle g|)E(t), \quad (6.8)$$

где $\wp_{ge} = \wp_{eg}^*$ – ненулевой элемент дипольной матрицы.

Используя определения (6.1), можно записать выражение (6.8) в матричном виде:

$$\hat{H}_I = -\mathcal{E} \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 0 & \wp_{ge} \\ \wp_{eg}^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Далее будем считать, что \wp_{eg} – действительное число.

Комбинируя (6.5) и (6.9), для полного гамильтониана \hat{H} в матричном представлении получаем:

$$\hat{H} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_e & -\Omega_R \cos(\omega t) \\ -\Omega_R \cos(\omega t) & \omega_g \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

где введена частота Раби:

$$\Omega_R = \frac{\wp_{eg} \mathcal{E}}{\hbar}, \quad (6.11)$$

которая полностью определяет особенности взаимодействия поля с веществом.

6.2. Осцилляции Раби

Используемый подход предполагает решение уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi\rangle, \quad (6.12)$$

где $|\Psi\rangle$ – квантовое состояние ДУС, которое записывается как:

$$|\Psi\rangle = C_e(t)|e\rangle + C_g(t)|g\rangle = \begin{pmatrix} C_e(t) \\ C_g(t) \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

В уравнении (6.13) $C_e(t)$ и $C_g(t)$ – зависящие от времени амплитуды вероятности, которые удовлетворяют условию нормировки:

$$|C_e(t)|^2 + |C_g(t)|^2 = 1, \quad (6.14)$$

здесь $P_e(t) = |C_e(t)|^2$ – вероятность нахождения ДУС в возбужденном состоянии.

Таким образом, даже если ДУС изначально была в основном состоянии, т.е. $C_g(0) = 1$ и $C_e(0) = 0$, то через некоторое время она перейдет в состояние суперпозиции (6.13). А значит состояние ДУС неизвестно до тех пор, пока не будет измерена ее энергия. Тогда с некоторой вероятностью ДУС окажется либо в основном, либо в возбужденном состоянии.

Теперь нужно решить уравнение Шредингера (6.12) с гамильтонианом (6.10) и найти комплексные амплитуды $C_{e,g}$. Подставляя (6.13) в (6.12) с (6.10), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} i\dot{C}_e \\ i\dot{C}_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_e & -\Omega_R \cos(\omega t) \\ -\Omega_R \cos(\omega t) & \omega_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_e \\ C_g \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

где точками обозначены производные по времени.

Уравнения (6.15) можно упростить, введя новые переменные F_e и F_g следующим образом:

$$F_e = C_e e^{i\omega_e t}, \quad F_g = C_g e^{i\omega_g t}. \quad (6.16)$$

Полученная система будет иметь вид:

$$\dot{F}_g = i\Omega_R \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} F_e; \quad (6.17)$$

$$\dot{F}_e = i\Omega_R \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} F_g. \quad (6.18)$$

В *приближении вращающейся волны* (ПВВ) предполагается, что члены, содержащие в экспоненте сумму частот $\omega + \omega_0$, изменяются гораздо быстрее, чем члены с отстройкой $\Delta \equiv \omega - \omega_0$, т.е. считается, что $|\Delta| \ll \omega + \omega_0$. В этом пределе (6.17) и (6.18) преобразуются к следующему виду:

$$\dot{F}_g = i \frac{\Omega_R}{2} e^{i\Delta t} F_e; \quad (6.19)$$

$$\dot{F}_e = i \frac{\Omega_R}{2} e^{-i\Delta t} F_g. \quad (6.20)$$

Уравнения (6.19), (6.20) допускают простые периодические решения при $\Delta = 0$. Пусть в начальный момент времени (при $t = 0$) ДУС находится в основном состоянии, т.е. $F_g(0) = 1$ и $F_e(0) = 0$. Тогда можно записать:

$$F_e(t) = i \sin(\Omega_R t/2); \quad (6.21)$$

$$F_g(t) = \cos(\Omega_R t/2). \quad (6.22)$$

Вероятность нахождения ДУС в возбужденном состоянии:

$$P_e(t) \equiv |C_e|^2 = |F_e|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right). \quad (6.23)$$

Для коротких промежутков времени или слабого э.м. поля (т.е. при $\Omega_R t \ll 1$) из уравнения (6.23) можно получить:

$$P_e(t) \simeq \frac{1}{4} \Omega_R^2 t^2, \quad (6.24)$$

что показывает увеличение вероятности возбуждения со временем как t^2 . Инверсия населенности вычисляется как:

$$W \equiv P_e - P_g = -\cos(\Omega_R t). \quad (6.25)$$

Таким образом, (6.25) предполагает существование периодических осцилляций Раби для инверсии населенности заданной ДУС. Такие колебания в ответ на воздействие интенсивным (классическим) светом называются *осцилляциями Раби* или *колебаниями Раби*. Амплитуда осцилляций максимальна при отстройке вблизи резонанса $\Delta = 0$.

Когерентность взаимодействия ДУС с э.м. полем описывается поляризацией ДУС, которую можно определить как:

$$\begin{aligned} P &\equiv \wp_{eg} [C_e^* C_g + C_g^* C_e] = \wp_{eg} [F_e^* F_g e^{i\omega_0 t} + F_g^* F_e e^{-i\omega_0 t}] = \\ &= \wp_{eg} \sin(\Omega_R t) \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Обратите внимание, что переменные P и W сдвинуты на $\pi/2$ относительно друг друга.

6.3. «Одетые» состояния

В квантовой оптике существуют так называемые «одетые» (dressed) состояния, представляющие собой важный физический предел взаимодей-

ствия поля с ДУС, когда сильное квантовое поле как бы «одевает» ДУС [21]. Введем зависимость от времени в уравнения (6.19), (6.20):

$$c_g(t) = C_g(t); \quad (6.27)$$

$$c_e(t) = C_e(t)e^{-i\Delta t}. \quad (6.28)$$

Новые переменные $c_{e,g}$ удовлетворяют системе уравнений, которую можно представить в матричной форме как:

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_e \\ \dot{c}_g \end{pmatrix} = -\frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} -\hbar\Delta & \hbar\Omega_R/2 \\ \hbar\Omega_R/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_e \\ c_g \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Матрица

$$H' = \begin{pmatrix} -\hbar\Delta & \hbar\Omega_R/2 \\ \hbar\Omega_R/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

представляет собой новый гамильтониан, зависящий от времени и обладающий собственными энергиями $E_{1,2}$ и состояниями $|\pm\rangle$ (ненормированными) в следующем виде:

$$E_{1,2} = \frac{\hbar}{2}(-\Delta \pm \omega_R); \quad (6.31)$$

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} \omega_R - \Delta \\ \Omega_R \end{pmatrix}; \quad (6.32)$$

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} \omega_R + \Delta \\ -\Omega_R \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

где ω_R – круговая частота полного расщепления Раби, вычисляемая как:

$$\omega_R = \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}. \quad (6.34)$$

Теперь можно записать преобразования состояний $|\pm\rangle$ к виду:

$$|+\rangle = \cos(\Theta/2) |e\rangle + \sin(\Theta/2) |g\rangle; \quad (6.35)$$

$$|-\rangle = -\sin(\Theta/2) |e\rangle + \cos(\Theta/2) |g\rangle, \quad (6.36)$$

где было введено

$$\text{tg}(\Theta) = -\frac{\Omega_R}{\Delta}, \quad (6.37)$$

угол Θ лежит в интервале $0 \leq \Theta < \pi$. Состояния, определяемые уравнениями (6.35)–(6.37) как раз и есть «одетые» *состояния*. Их часто используют для объяснения полученных спектральных особенностей в условиях расщепления Раби.

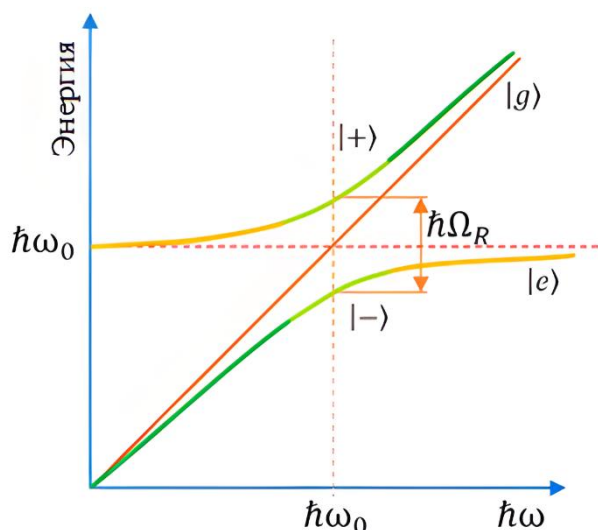


Рис. 6.2. Зависимость энергии «одетых» (связанных) состояний ДУС со световым полем от $\hbar\omega$. Пунктирные линии соответствуют несвязанным (основным) состояниям; $\hbar\Omega_R$ – резонансная энергия расщепления Раби

На рис. 6.2 схематично показаны дисперсионные свойства «одетых» состояний, т.е. зависимость энергий «одетых» состояний ДУС от энергии фотонов $\hbar\omega$. Энергии уровней «одетых» состояний создают две ветви гиперболы. Минимальный зазор частот между «одетыми» состояниями есть частота расщепления Раби Ω_R вблизи резонанса $\Delta = 0$. Состояние $|+\rangle$ всегда располагается над состоянием $|-\rangle$. При $\Delta \neq 0$ состояния $|+\rangle$ и $|-\rangle$ отталкиваются друг от друга, демонстрируя так называемый эффект антипересечения (anti-crossing effect).

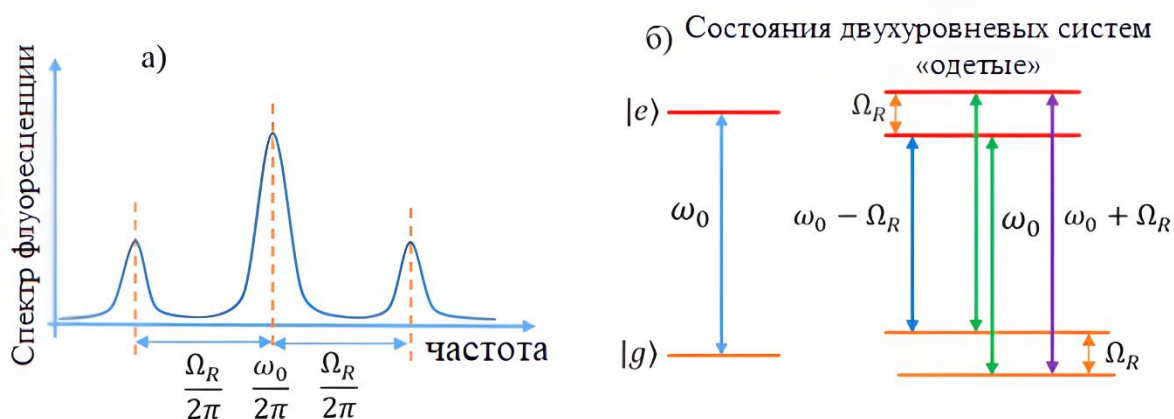


Рис. 6.3. а) Схематический спектр флуоресценции (триплет Моллоу) при наличии резонансного взаимодействия квантованного светового излучения с двухуровневой системой. б) Разрешенные переходы между мультиплетными уровнями «одетого» состояния. Цветные линии соответствуют триплету Моллоу

Представление «одетых» состояний позволяет описать спектр флуоресценции двухуровневых атомов или молекул газа, представленный на рис. 6.3(а). В 1969 г. Моллоу впервые показал, что этот спектр флуоресценции может расщепляться на триплет с круговыми частотами ω_0 и

$\omega_0 \pm \Omega_R$. В эксперименте хорошо заметны спектральные линии на центральной частоте ω_0 и боковых частотах $\omega_0 \pm \Omega_R$. Возникновение этих линий легко объясняется на рис. 6.3(б) с помощью «одетых» состояний. В частности, круговые частоты разрешенных переходов представляют собой перенос населенности между энергетическими уровнями. Важно отметить, что переходы между «одетыми» состояниями с испусканием фотонов запрещены.

6.4. Задачи

1. Что такое правило отбора? Приведите примеры.
 2. Как линейная и круговая поляризация э.м. поля влияют на элементы матрицы H_I ? Рассмотрите водородоподобный атом.
 3. Решите уравнения (6.19) и (6.20), предполагая, что ДУС изначально находится в возбужденном состоянии.
 4. Решите уравнения (6.19) и (6.20) при $\Delta \neq 0$, используя метод преобразования Лапласа.
 5. В процессе решения уравнений (6.19) и (6.20) докажите, что для ненулевой отстройки $\Delta \neq 0$ частота Раби ω_R имеет вид (6.34).
 6. Исследуйте и постройте вероятность P_e возбуждения ДУС в пределе $\Delta^2 \gg \Omega_R^2$.
 7. Каков физический смысл того, что поляризация и разность населенностей ДУС сдвинуты друг относительно друга на $\pi/2$?
 8. Рассмотрите взаимодействие светового поля с атомом водорода, обладающим резонансным переходом $1s \rightarrow 2p$ на длине волны 137 нм (атомный диполь равен $0.74ea_0 = 6.32 \times 10^{30}$ Кл·м). Рассчитайте период $T_R = 2\pi/\Omega_R$ осцилляций Раби для интенсивности света 10 кВт/м², см. [4]. (Ответ: $T_R = 38$ нс)
- Подсказка: Рассмотрите связь интенсивности света и амплитуды электрического поля $I = \frac{1}{2}c\epsilon_0 n \mathcal{E}^2$, где n – показатель преломления среды, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{12}$ Ф/м – диэлектрическая проницаемость вакуума в СИ, c – скорость света в вакууме.
9. Получите уравнения (6.31)–(6.33).
 10. Докажите, что «одетые» состояния (6.35), (6.36) удовлетворяют условию нормировки. Являются ли эти состояния взаимно ортогональными?
 11. Докажите, что вдали от резонанса энергетические уровни (6.31) можно записать как:

$$E_1 = E_g + \frac{\hbar\Omega_R^2}{4\Delta}; \quad (6.38)$$

$$E_2 = E_e - \frac{\hbar\Omega_R^2}{4\Delta}. \quad (6.39)$$

В частности, энергетические сдвиги пропорциональны квадрату возбуждающего поля, что известно как «световые сдвиги» или динамические сдвиги Старка.

12. Рассмотрите уравнения (6.35)–(6.37) вдали от резонанса, когда $|\Delta| \gg \Omega_R$. Как ведут себя «одетые» состояния в этом пределе? Отдельно исследуйте положительную и отрицательную отстройку Δ .

7. ПРОСТЫЕ КВАНТОВЫЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ

В теории взаимодействия света с веществом только несколько моделей можно решить точно на квантовом уровне. В этой главе будут рассмотрены некоторые из них, которые принято связывать с резонаторной квантовой электродинамикой (cavity quantum electrodynamics), см., например, [10].

7.1. Модель Джейнса–Каммингса

Модель Джейнса–Каммингса (ДК) – одна из ключевых сугубо квантовых моделей в теории взаимодействия поля с веществом в резонаторе. Для получения ДК-модели следует включить квантованное э.м. поле резонатора в квазиклассический гамильтониан (6.7), описывающий взаимодействие между ДУС и одномодовым э.м. полем:

$$\hat{H} = \hat{H}_{TLS} + \hat{H}_F + \hat{H}_I(t). \quad (7.1)$$

Член \hat{H}_F в (7.1) представляет собой гамильтониан квантованного свободного (от взаимодействия) э.м. поля в резонаторе (ср. с (2.8)):

$$\hat{H}_F = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (7.2)$$

Поскольку полный квантовый гамильтониан (7.1) взаимодействия поля с веществом определен с точностью до константы, задающей некоторый несущественный энергетический сдвиг, то член, описывающий постоянную энергию $\hbar\omega/2$ в уравнении (7.2) был опущен. В гамильтониане $\hat{H}_I(t)$ можно учесть квантованное (линейно поляризованное) поле, если в уравнении (6.8) вместо классической функции $E(t)$ рассмотреть оператор поля (2.29). В дипольном приближении предполагаем, что:

$$\hat{H}_I(t) = -(\wp_{ge}|g\rangle\langle e| + \wp_{eg}|e\rangle\langle g|)\hat{E}(t). \quad (7.3)$$

Подставляя (2.29) в (7.3), получаем:

$$\hat{H}_I(t) = -i\hbar g(\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+)(\hat{a}e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}), \quad (7.4)$$

где

$$g \equiv \left(\frac{\omega}{2\hbar\epsilon_0 V}\right)^{\frac{1}{2}} \wp_{ge} \quad (7.5)$$

есть сила взаимодействия одиночной ДУС с квантовым полем резонатора; предполагается, что $\wp_{ge} = \wp_{eg}^*$ – действительный параметр. В (7.4) также вводятся лестничные операторы перехода ДУС вниз ($\hat{\sigma}_-$) и вверх ($\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_-^\dagger$) в виде:

$$\hat{\sigma}_+ \equiv |e\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_- \equiv |g\rangle\langle e|. \quad (7.6)$$

С учетом уравнения (6.2) легко проверить правила для операторов (7.6):

$$\hat{\sigma}_+|e\rangle = 0, \quad \hat{\sigma}_+|g\rangle = |e\rangle, \quad (7.7)$$

$$\hat{\sigma}_-|e\rangle = |g\rangle, \quad \hat{\sigma}_-|g\rangle = 0. \quad (7.8)$$

Операторы (7.6) удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z, \quad [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm] = \pm 2\hat{\sigma}_\pm, \quad (7.9)$$

где $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ – оператор, описывающий инверсию ДУС. Стоит отметить, что операторы уничтожения фотона, \hat{a} , и рождения фотона, \hat{a}^\dagger , коммутируют с любым сигма-оператором $\hat{\sigma}_\pm$, $\hat{\sigma}_z$ ДУС.

Переходя от представления Шредингера к так называемому *представлению взаимодействий*, в уравнении (7.4) можно предположить, что операторы $\hat{\sigma}_\pm$ изменяются во времени как $\hat{\sigma}_\pm = \hat{\sigma}_\pm e^{\pm i\omega_0 t}$. Таким образом, уравнение (7.4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) = & -i\hbar g(\hat{\sigma}_- \hat{a} e^{-i(\omega+\omega_0)t} - \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{i(\omega+\omega_0)t}) - \\ & -i\hbar g(\hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{-i(\omega-\omega_0)t} - \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{i(\omega-\omega_0)t}). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Приближение вращающейся волны (ПВВ) позволяет опустить первую скобку в (7.10). В этом случае получаем:

$$\hat{H}_I(t) = -i\hbar g(\hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{-i\Delta t} - \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{i\Delta t}), \quad (7.11)$$

где $\Delta \equiv \omega - \omega_0$ – отстройка.

Физически приближение вращающейся волны предполагает, что член $\hat{\sigma}_- \hat{a}$ соответствует переходу вниз в ДУС, сопровождаемому однофотонным поглощением. Слагаемое $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ описывает элементарный процесс перехода вверх с испусканием фотона. Эти процессы не сохраняют общее число фотонов и, как следствие, сильно подавляются. Представим гамильтониан \hat{H}_{TLS} из уравнения (7.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_{TLS} = & \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_e + \omega_g & 0 \\ 0 & \omega_e + \omega_g \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_e - \omega_g & 0 \\ 0 & \omega_g - \omega_e \end{pmatrix} = \\ = & \frac{\hbar}{2} (\omega_e + \omega_g) \hat{I} + \frac{\hbar}{2} (\omega_e - \omega_g) \hat{\sigma}_z, \end{aligned} \quad (7.12)$$

где $\hat{I} = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|$ – унитарный единичный оператор. И снова первое слагаемое в уравнении (7.12) относится к постоянной энергии и поэтому может быть опущено. Обобщая и возвращаясь к представлению Шредингера, уравнение (7.1) можно теперь записать в виде:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} - i\hbar g(\hat{\sigma}_+ \hat{a} - \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger), \quad (7.13)$$

где $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$. Уравнение (7.13) и есть ДК-модель взаимодействия ДУС с квантованным полем резонатора. Далее представим (7.13) как:

$$\hat{H} = \hat{H}_{ex} + \hat{H}_{eff}, \quad (7.14)$$

где

$$\hat{H}_{ex} = \hbar \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}_z \right) = \hbar \omega \hat{N}_{ex}; \quad (7.15)$$

$$\hat{H}_{eff} = -\frac{1}{2}\hbar\Delta\hat{\sigma}_z - i\hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} - \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger), \quad (7.16)$$

а оператор возбуждения записывается как:

$$\hat{N}_{ex} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z. \quad (7.17)$$

Оператор \hat{N}_{ex} коммутирует с \hat{H} , далее можно рассматривать только эффективный ДК гамильтониан (7.16).

Рассмотрим начальное состояние всей системы в виде суперпозиции

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |g\rangle|n\rangle, \quad (7.18)$$

где $|g\rangle|n\rangle$ – состояние (сепарабельное, незапутанное) в виде тензорного произведения состояния атома в основном состоянии $|g\rangle$ и состояния n фотонов в квантовом излучении.

В уравнении (7.18) c_n относится к начальному распределению вероятностей фотонов, которое считается пуассоновским:

$$|c_n|^2 = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad (7.19)$$

где \bar{n} – среднее число фотонов. Как показано в (3.24), вероятность $|c_n|^2$ соответствует изначально когерентному световому полю, $\bar{n} \equiv \langle \hat{n} \rangle$.

С течением времени состояние (7.18) становится запутанным:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [C_{g,n}(t)|g\rangle|n\rangle + C_{e,n}(t)|e\rangle|n\rangle], \quad (7.20)$$

где $C_{g,n} \equiv C_{g,n}(t)$ и $C_{e,n} \equiv C_{e,n}(t)$ – зависящие от времени амплитуды вероятности.

Проанализируем физические свойства состояния (7.20). Для этого используем часть полного гамильтониана (7.13), отвечающую за взаимодействие, $\hat{H}_I(t)$:

$$\hat{H}_I(t) = -i\hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} - \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger). \quad (7.21)$$

Результат воздействия \hat{H}_I на основное состояние ДУС, содержащее n фотонов есть

$$\hat{H}_I|g\rangle|n\rangle = -i\hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a}|g\rangle|n\rangle - \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger|g\rangle|n\rangle) = -i\hbar g\sqrt{n}|e\rangle|n-1\rangle. \quad (7.22)$$

При преобразовании (7.22) использовались уравнения (2.10), (7.7) и (7.8). Очевидно, что воздействие на состояние $|g\rangle|0\rangle$ (не содержащее фотонов) нужно описать отдельно:

$$\hat{H}_I|g\rangle|0\rangle = 0, \quad (7.23)$$

где используется определение (2.13) для вакуумного состояния.

Как следует из уравнений (7.22) и (7.23), ДК-модель обеспечивает связь состояния $|g\rangle|n\rangle$ с $|e\rangle|n-1\rangle$, оставляя состояние $|g\rangle|0\rangle$ несвязанным.

Следовательно, для ДК-модели выражение (7.20) можно переписать в более подходящей форме:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} [C_{g,n}|g\rangle|n\rangle + C_{e,n-1}|e\rangle|n-1\rangle] + C_{g,0}|g\rangle|0\rangle. \quad (7.24)$$

Т.к. начальное состояние (7.18) – сепарабельное состояние основного состояния ДУС и поля резонатора, можно записать начальные состояния для (7.24):

$$C_{g,n}(0) = c_n, \quad C_{e,n-1}(0) = 0. \quad (7.25)$$

Подставляя (7.20) в уравнение Шредингера (6.12) с гамильтонианом (7.16), получаем:

$$\dot{C}_{g,n} = -i\frac{\Delta}{2}C_{g,n} + g\sqrt{n}C_{e,n-1}; \quad (7.26)$$

$$\dot{C}_{e,n-1} = i\frac{\Delta}{2}C_{e,n-1} - g\sqrt{n}C_{g,n}. \quad (7.27)$$

Таким образом, в уравнениях (7.26), (7.27) получается связанная пара состояний, которая эффективно представляет из себя ДУС.

Решение (7.26), (7.27) с начальными условиями (7.25) будет следующим:

$$C_{g,n}(t) = c_n \left(\cos[0.5\omega_{R,n}t] - i\frac{\Delta}{\omega_{R,n}} \sin[0.5\omega_{R,n}t] \right); \quad (7.28)$$

$$C_{e,n-1}(t) = -c_n \frac{2g\sqrt{n}}{\omega_{R,n}} \sin[0.5\omega_{R,n}t], \quad (7.29)$$

где $\omega_{R,n} = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2n}$ – частота Раби (6.34), зависящая от числа фотонов.

Для большей конкретики рассмотрим (7.28), (7.29) при условии резонанса взаимодействия излучения с веществом (при $\Delta = 0$). В этом случае вероятность найти атом в основном состоянии $|g\rangle$ равна:

$$P_g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_{g,n}(t)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 (1 + \cos[2g\sqrt{n}t]), \quad (7.30)$$

где коэффициенты $|c_n|^2$ определены в (7.19).

Уравнение (7.30) есть обобщение осцилляций Раби на квантовый случай, когда каждое число фотонов n вносит в осцилляции Раби n квантов с угловой частотой $\Omega_{R,n} \equiv 2g\sqrt{n}$. Квазиклассический результат можно получить в пределе больших n , если предположить, что $n \approx \bar{n}$. При этом среднюю частоту Раби в этом квазиклассическом пределе можно записать как:

$$\Omega_{R,n} \approx \Omega_{R,\bar{n}} \equiv 2g\sqrt{\bar{n}}. \quad (7.31)$$

В этом случае из уравнения (7.30) сразу следует, что:

$$P_g(t) \approx \frac{1}{2} (1 + \cos[\Omega_{R,\bar{n}}t]). \quad (7.32)$$

Уравнения (7.31) и (7.32) приводят к соотношению, полученному в (6.25) для разности населенности W , возникающей в ДУС при наличии классического возбуждающего поля.

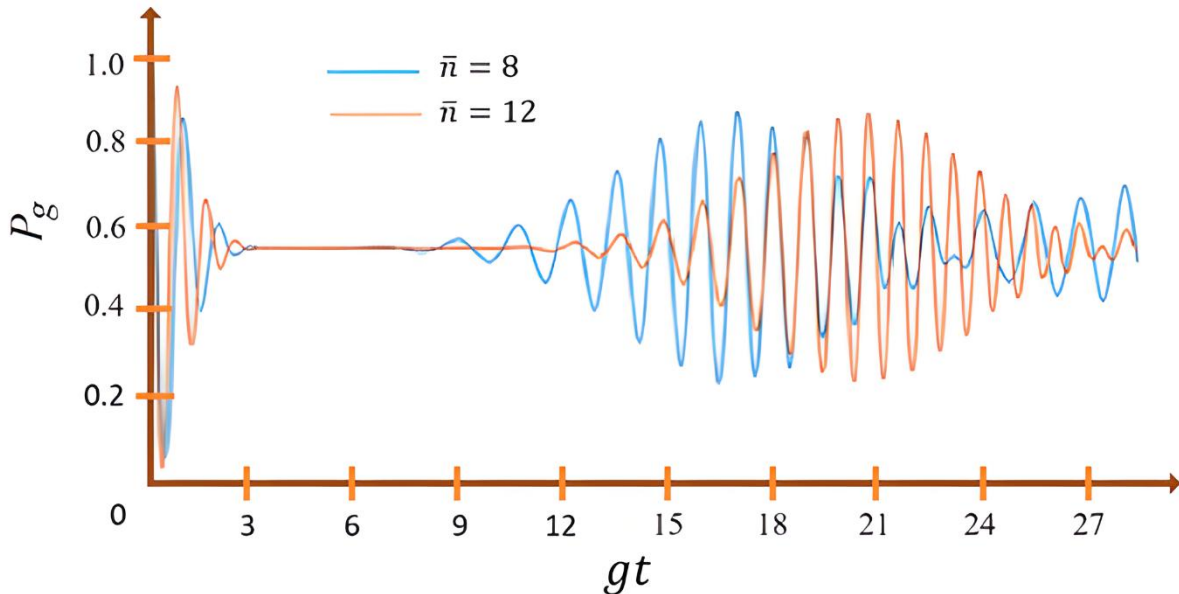


Рис. 7.1. Зависимость вероятности заселенности основного состояния P_g от нормированного времени gt для ДК-модели с изначально когерентным световым полем

На рис. 7.1 представлена зависимость вероятности заселенности основного состояния $P_g(t)$ от безразмерного времени gt для небольшого среднего числа фотонов. Огибающая $P_g(t)$ демонстрирует периодически сменяющиеся **коллапсы** (collapses) и **возрождения** (revivals) колебаний атомной населенности, представляющие собой сугубо квантовое явление, возникающее при взаимодействии светового излучения с веществом. Коллапсы и возрождения возникают из-за интерференции отдельных мод с собственными частотами Раби $\Omega_{R,n}$, зависящими от числа фотонов n . Затухание происходит из-за разброса в начальных значениях числа фотонов.

В пределе большого среднего числа фотонов $\bar{n} \gg 1$ представим \sqrt{n} как:

$$\sqrt{n} = \sqrt{\bar{n} + (n - \bar{n})} = \sqrt{\bar{n}} \sqrt{1 + \frac{n - \bar{n}}{\bar{n}}} \approx \sqrt{\bar{n}} \left(1 + \frac{n - \bar{n}}{2\bar{n}} \right) + \dots \quad (7.33)$$

В уравнении (7.33) имеется разложение \sqrt{n} в ряд Тейлора с ограничением в два слагаемых. Затем вместо распределения Пуассона воспользуемся гауссовым распределением вероятностей:

$$\frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}} e^{-(n-\bar{n})^2/2\bar{n}}. \quad (7.34)$$

Комбинируя (7.33) и (7.34) с (7.30), получаем:

$$P_g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\pi\bar{n})^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dn e^{\frac{-(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}} \cos \left[\Omega_{R,\bar{n}} t \left(1 + \frac{n-\bar{n}}{2\bar{n}} \right) \right], \quad (7.35)$$

где область интегрирования была расширена до бесконечности. Представляя косинус в (7.35) в виде $\cos[\dots] = \frac{1}{2}(e^{i[\dots]} + e^{-i[\dots]})$, можно получить Фурье-преобразование гауссовой функции. После несложных вычислений из (7.35) получаем

$$P_g(t) = \frac{1}{2} (1 + e^{-(t/\tau_{coll})^2} \cos[\Omega_{R,\bar{n}} t]), \quad (7.36)$$

где

$$\tau_{coll} = \frac{\sqrt{2}}{g} \quad (7.37)$$

определяет время первого коллапса. Примечательно, что в рассмотренном подходе τ_{coll} не зависит от среднего числа фотонов \bar{n} . Из рис. 7.1 видно, что огибающие синей и красной кривых в первый раз коллапсируют одновременно.

Возрождение колебаний происходит, когда все близлежащие моды снова становятся синфазными после первоначальной дефазировки. Пик возрождения можно оценить как момент времени T_{rev} , когда основное число мод, описанных в (7.30), окажется в фазе. Другими словами, возбуждение происходит, когда \bar{n} -й и $(\bar{n} - 1)$ -й осцилляторы Раби накапливают общую фазу, равную:

$$2g\sqrt{\bar{n}}T_{rev} - 2g\sqrt{\bar{n}-1}T_{rev} = 2\pi, \quad (7.38)$$

из чего можно получить оценку:

$$T_{rev} = \frac{\pi}{g(\sqrt{\bar{n}} - \sqrt{\bar{n}-1})} \simeq \frac{2\pi\sqrt{\bar{n}}}{g}. \quad (7.39)$$

Выражение (7.39) полностью согласуется с результатами, представленными на рис. 7.1; в частности, при увеличении среднего числа фотонов T_{rev} растет.

Практическое значения уравнения (7.39) можно пояснить, если использовать квазиклассическое выражение угловой частоты расщепления Раби $\Omega_{R,\bar{n}}$. Комбинируя его с уравнением (7.31), получаем:

$$T_{rev} = \frac{4\pi\bar{n}}{\Omega_{R,\bar{n}}}. \quad (7.40)$$

Из (7.40) видно, что для экспериментального наблюдения возрождений необходимо большое среднее значение угловой частоты расщепления Раби при умеренном среднем числе фотонов \bar{n} . Заметим, что представленная выше теория не учитывает эффекты атомной декогеренции и потери фотонов, которые всегда присутствуют в любой схеме квантового взаимодействия света с веществом. Таким образом, экспериментальное наблюдение

ние коллапсов и возрождений представляется нетривиальной экспериментальной задачей; на данный момент было проведено только несколько экспериментов на эту тему.

7.2. Поляритоны в микрорезонаторе

Поляритоны в микрорезонаторе представляют собой еще одно важное точное решение модели взаимодействия излучения с веществом. Эта модель описывает ансамбль ДУС, помещенных в резонатор и взаимодействующих с квантованным э.м. полем. На практике такая система представляет из себя, например, полупроводниковые квантовые ямы (КЯ), помещенные между двух брэгговских зеркал, формирующих микрорезонатор Фабри–Перо, см. рис. 7.2. Экситон, состоящий из связанной электронно-дырочной пары, в полупроводниковой КЯ представляет собой оптически активный диполь, возникающий за счет кулоновского взаимодействия между электроном в зоне проводимости и дыркой в валентной зоне. Таким образом, для расчетов можно считать экситон в КЯ двухуровневой системой, сильно связанной с полем резонатора.

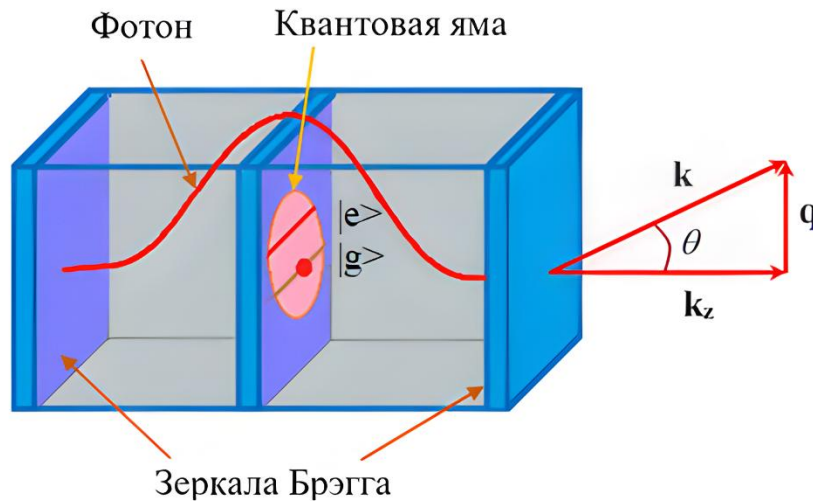


Рис. 7.2. Схема высокодобротного плоского микрорезонатора с квантовыми ямами (КЯ). Экситон КЯ (ДУС) в микрорезонаторе связан с фотонной модой с волновым вектором \mathbf{k} ; k_z – продольная компонента квантованного поля в микрорезонаторе. Фотоны испускаются под углом θ и соответствуют поляритонам с поперечным волновым вектором \mathbf{q}

Фотоны в микрорезонаторе имеют конечное время жизни τ_{ph} из-за потерь света через брэгговские зеркала. Условие сильной связи предполагает выполнение следующего неравенства:

$$g \gg \frac{1}{\tau_{ph}} \gamma_0, \quad (7.41)$$

где γ_0 – скорость декогеренции ДУС. На практике можно считать систему сильно связанной, если возбуждение может когерентно передаваться между фотоном и ДУС хотя бы один раз.

В плоских микрорезонаторах 2D экситоны и 2D фотонные моды могут формировать собственные моды, называемые поляритонами. Рассмотрим гамильтониан такой системы (см. рис. 7.2) в приближении вращающейся волны [22]:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_F + \hat{H}_{ex} + \hat{H}_I = \\ &= \hbar \sum \left(\omega(k) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \omega_0(k) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + g(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger) \right),\end{aligned}\quad (7.42)$$

где $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ – оператор рождения фотона с волновым вектором \mathbf{k} ; $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ – оператор рождения возбуждения ДУС в КЯ. Физически возбуждение ДУС (экситона) есть ее поляризация. Операторы $\hat{a}_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$, $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ удовлетворяют бозонным коммутационным соотношениям:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [\hat{b}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{b}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0. \quad (7.43)$$

В уравнении (7.42), $\omega(k)$ и $\omega_0(k)$ описывают дисперсию оптического поля и ДУС, соответственно. Для плоского микрорезонатора их можем записать в виде:

$$\omega(k) = c|\mathbf{k}| = c\sqrt{k_z^2 + q^2} \approx c\left(k_z + \frac{q^2}{2k_z}\right) = ck_z + \frac{\hbar q^2}{2m_{ph}}; \quad (7.44)$$

$$\omega_0(k) = \omega_0 + \frac{\hbar q^2}{2m_0}, \quad (7.45)$$

где m_0 – масса ДУС, q – поперечный волновой вектор, k_z – продольное волновое число, соответствующее периодическим граничным условиям квантования поля.

В (7.44) используется так называемое *параксиальное приближение*, известное из оптики и выражающееся условием $|\mathbf{q}| \ll k_z$. В этом пределе можно ввести эффективную массу фотонов резонатора $m_{ph} = \hbar k_z / c$.

Гамильтониан (7.42) может быть приведен к диагональной форме с помощью унитарного преобразования Боголюбова:

$$\hat{P}_{\mathbf{k}} = X_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} + C_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}; \quad (7.46)$$

$$\hat{Q}_{\mathbf{k}} = -C_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}} + X_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}, \quad (7.47)$$

где $X_{\mathbf{k}}$ и $C_{\mathbf{k}}$ – коэффициенты Хопфилда, определенные как:

$$|X_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\Delta_{\mathbf{k}}^2 + 4g^2}} \right); \quad (7.48)$$

$$|C_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\Delta_{\mathbf{k}}^2 + 4g^2}} \right). \quad (7.49)$$

В (7.48), (7.49) отстройка определяется как $\Delta_{\mathbf{k}} = \omega_0(k) - \omega(k)$. Операторы в (7.46), (7.47) подчиняются коммутационным соотношениям:

$$[\hat{P}_{\mathbf{k}}, \hat{P}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [\hat{Q}_{\mathbf{k}}, \hat{Q}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [\hat{P}_{\mathbf{k}}, \hat{Q}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0, \quad (7.50)$$

а коэффициенты Хопфилда $X_{\mathbf{k}}$ и $C_{\mathbf{k}}$ удовлетворяют равенству

$$|X_{\mathbf{k}}|^2 + |C_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \quad (7.51)$$

Воспользовавшись выражениями (7.46)–(7.49) в уравнении (7.42), можно прийти к диагональному виду \hat{H} :

$$\hat{H} = \hbar \sum_{\mathbf{k}} \Omega_{\text{LP}}(k) \hat{P}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{P}_{\mathbf{k}} + \hbar \sum_{\mathbf{k}} \Omega_{\text{UP}}(k) \hat{Q}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{Q}_{\mathbf{k}}. \quad (7.52)$$

Физически, операторы $(\hat{P}_{\mathbf{k}}, \hat{P}_{\mathbf{k}}^\dagger)$ и $(\hat{Q}_{\mathbf{k}}, \hat{Q}_{\mathbf{k}}^\dagger)$, определенные в (7.46)–(7.52), характеризуют новую пару нормальных мод, описывающих два типа бозонных квазичастиц, возникающих в результате взаимодействия поля с веществом; они называются поляритонами верхней (UP) и нижней (LP) дисперсионной ветви, соответственно.

Характерные круговые частоты $\Omega_{\text{UP}}(k)$ и $\Omega_{\text{LP}}(k)$ в уравнении (7.52) определяют дисперсионные соотношения для поляритонов верхней и нижней ветви, соответственно. Они выводятся при диагонализации гамильтониана и могут быть представлены в виде:

$$\Omega_{\text{UP,LP}}(k) = \frac{1}{2} \left[\omega_0(k) + \omega(k) \pm \sqrt{4g^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2} \right]. \quad (7.53)$$

На рис. 7.3 представлены энергии поляритонов верхней и нижней ветви $\hbar\Omega_{\text{UP,LP}}(k)$ (в условных единицах) как функции от отстройки $\Delta_{\mathbf{k}}$. Они показывают эффект антикроссинга, аналогичный зависимости для «одетых» состояний на рис. 6.2. Эффект антикроссинга для измеренных дисперсий при различных значениях отстройки представляет собой важный признак режима сильной связи.

Таким образом, согласно определениям (7.48), (7.49), поляритон – это линейная суперпозиция возбуждения ДУС и фотона, вклады которых определяются коэффициентами Хопфилда $X_{\mathbf{k}}$, $C_{\mathbf{k}}$. Из (7.48), (7.49) и рис. 7.3 видно, что в условиях резонанса ($\Delta_{\mathbf{k}} = 0$) $|X_{\mathbf{k}}|^2 = |C_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2}$. А именно, вклад фотонов и экситонов в поляритоны одинаков. В этом случае частотный зазор между верхней и нижней ветвью поляритонов минимален и равен $\Omega_{\text{UP}}(k) - \Omega_{\text{LP}}(k) = 2g$ (см. рис. 7.3).

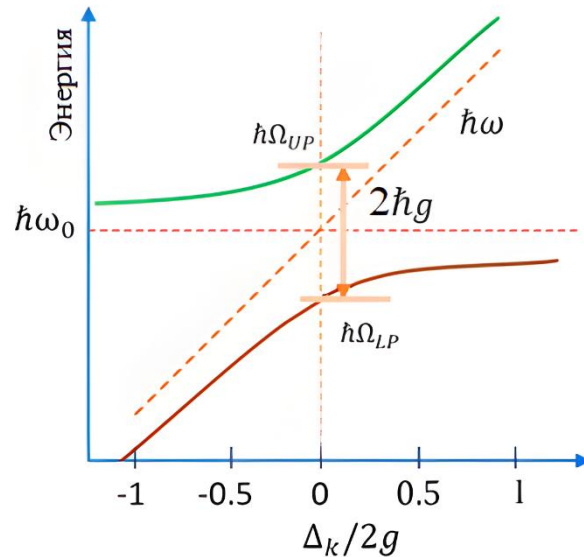


Рис. 7.3. Дисперсия поляритонов верхней и нижней ветви (в условных единицах) как функция нормированной отстройки $\Delta_{\mathbf{k}}/2g$ для поперечного импульса $q \approx 0$. Пунктирные линии относятся к дисперсии не взаимодействующих фотонов и экситонов ДУС

Напротив, в пределе большой отстройки $|\Delta_{\mathbf{k}}| \gg g$ поляритоны становятся либо фотоподобными, либо экситоподобными, что следует из уравнений (7.46)–(7.49).

Теперь учтем в (7.53) конечное время жизни фотона в резонаторе τ_{ph} и скорость дефазировки возбуждения ДУС γ_0 . В этом пределе круговые частоты $\Omega_{UP}(k)$ и $\Omega_{LP}(k)$, полученные в (7.53), приобретают вид

$$\Omega_{UP,LP}(k) = \frac{1}{2} \left(\omega_0(k) + \omega(k) + i(\gamma_{ph} + \gamma_0) \pm \sqrt{4g^2 + [\Delta_{\mathbf{k}} + i(\gamma_{ph} - \gamma_0)]^2} \right), \quad (7.54)$$

где $\gamma_{ph} \approx 1/\tau_{ph}$ – скорость потерь фотонов из резонатора. Из уравнения (7.54) видно, что частота Раби может быть подавлена при наличии существенной декогеренции (выражение под корнем становится отрицательным), обусловленной потерями фотонов из резонатора, или эффектами дефазировки.

7.3. Задачи

1. Докажите коммутационные соотношения (7.9).
2. Рассмотрите двухуровневый атом цезия, помещенный в резонатор Фабри–Перо с длиной 60 мкм и модальным объемом $5 \times 10^{14} \text{ м}^3$. Мода резонатора настроена на резонанс с атомным переходом при 852 нм, который имеет $\wp_{ge} = 3 \times 10^{29} \text{ Кл}\cdot\text{м}$. Численно оцените константу взаимодействия атом-поле g [4]. (Ответ: $g = 1.5 \times 10^8 \text{ рад/с}$)
3. Рассмотрите эрмитовы спиновые операторы в следующей форме:

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-; \quad (7.55)$$

$$\hat{\sigma}_y = i(\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+). \quad (7.56)$$

Найдите матричное представление операторов $\hat{\sigma}_{x,y,z}$.

4. Докажите алгебраические коммутационные соотношения SU(2):

$$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z, \quad [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] = 2i\hat{\sigma}_y, \quad [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z] = 2i\hat{\sigma}_x. \quad (7.57)$$

5. Докажите, что оператор полного числа квантов

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \quad (7.58)$$

коммутирует с гамильтонианом (7.16).

6. Выведите правую часть формулы (7.37).

7. Выведите уравнения (7.28)–(7.30) для ненулевой отстройки Δ . Проанализируйте предел $|\Delta| \gg g$. Проанализируйте влияние $\Delta \neq 0$ на времена коллапса и возбуждения. Постройте их графики.

8. Исследуйте средние значения спиновых операторов $\langle \Psi(t) | \hat{\sigma}_{x,y,z} | \Psi(t) \rangle$, используя уравнения (7.24) и (7.57).

9. Выведите соотношение неопределенностей из (7.57). Исследуйте дисперсии спиновых операторов $\langle (\hat{\sigma}_{x,y,z})^2 \rangle$ для состояния Джайнса–Каммингса (7.24).

10. В экспериментах с атомами, помещенными в резонатор при малой интенсивности/потоке атомного пучка, резонатор содержит преимущественно тепловые фотоны. Они подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна с распределением вероятностей:

$$|c_n|^2 = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}}, \quad (7.59)$$

где $\bar{n} = (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^{-1}$ – среднее число тепловых фотонов. Вычислите заселенность основного состояния по уравнению (7.30) с вероятностью, определяемой по формуле (7.59), и постройте полученные зависимости. Сравните квантовые явления коллапса и возбуждения для теплового и когерентного полей.

11. Докажите, что преобразования Боголюбова (7.48), (7.49) есть унитарное преобразование без потерь в общем случае.

12. Численно оцените эффективную массу фотона m_{ph} в резонаторе, соответствующую частоте поля резонатора $\omega/2\pi = 353$ ТГц. Во сколько раз она меньше массы свободного электрона?

13. Выведите (7.52), выполнив процедуру диагонализации гамильтониана (7.42).

14. Докажите, что уравнение

$$m_{LP,UP} = \frac{2m_0 m_{ph} \sqrt{\Delta^2 + 4g^2}}{(m_0 + m_{ph}) \sqrt{\Delta^2 + 4g^2} \pm (m_0 - m_{ph}) \Delta} \quad (7.60)$$

может быть получено из определения эффективной массы квазичастицы:

$$m_{\text{UP,LP}} = \hbar \left(\frac{\partial^2 \Omega_{\text{UP,LP}}(k)}{\partial q^2} \Big|_{q=0} \right)^{-1}. \quad (7.61)$$

15. Рассмотрите (7.60) в пределе больших значений отстройки $|\Delta| \gg g$. Найдите приближительные выражения для масс поляритонов $m_{\text{UP,LP}}$. Изучите пределы положительной и отрицательной отстройки Δ .

16. Рассмотрите групповую скорость поляритонов:

$$V_{\text{UP,LP}} = \frac{\partial \Omega_{\text{UP,LP}}(k)}{\partial q}. \quad (7.62)$$

Исследуйте уравнение (7.62) в пределах $\Delta = 0$ и $|\Delta| \gg g$. Рассмотрите пределы положительной и отрицательной отстройки Δ .

17. Докажите, что время жизни поляритонов может быть получено в виде:

$$\gamma_{\text{LP}} = |X_{\mathbf{k}}|^2 \gamma_0 + |C_{\mathbf{k}}|^2 \gamma_{ph}; \quad (7.63)$$

$$\gamma_{\text{UP}} = |C_{\mathbf{k}}|^2 \gamma_0 + |X_{\mathbf{k}}|^2 \gamma_{ph}. \quad (7.64)$$

Исследуйте (7.63) и (7.64) в двух предельных случаях, при которых $\Delta = 0$ и $|\Delta| \gg g$, соответственно. Учитывайте пределы положительной и отрицательной отстройки Δ .

18. Гамильтониан взаимодействия вещества и поля за пределами приближения вращающейся волны может быть описан как (см. (7.42)):

$$\hat{H} = \hbar \sum \left(\omega(k) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \omega_0(k) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + g(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}})(\hat{b}_{\mathbf{k}} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger) \right). \quad (7.65)$$

Диагонализуйте этот гамильтониан для нахождения собственных частот и собственных мод (поляритонов).

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

8.1. Пример отчета по практической работе

ОТЧЕТ О ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №
"Название практической работы"

Имя и Фамилия студента, номер группы.

1. Цель работы;
2. Задачи;
3. Ход работы;
4. Исходные данные/Анализ/Результаты/Обсуждение и выводы;
5. Заключение;
6. Список литературы.

8.2. Требования к работе

- корректная обработка результатов измерений;
- отчет имеет исчерпывающий характер и представляет материал в логической и последовательной форме;
- в отчете представлены все необходимые разделы;
- построены все необходимые графики;
- даны правильные ответы на все контрольные вопросы.

8.3. Шкала и критерии оценок

Каждая практическая работа оценивается по шкале от 4 до 8 баллов, что в сумме дает максимум 40 баллов за все пять практических работ.

8 баллов: все задания выполнены верно, на все контрольные вопросы даны четкие и правильные ответы.

6–7 баллов: все задания выполнены с незначительными ошибками, не влияющие на итоговый верный результат, на все контрольные вопросы даны ответы с комментариями преподавателя.

3–5 баллов: не все задания выполнены верно; на все контрольные вопросы даны ответы с комментариями преподавателя.

1–3 баллов: все задания выполнены неверно; студент ответил на контрольные вопросы с ошибками или не ответил совсем.

Если студент не сдал отчет по практической работе, то он получает 0 баллов за работу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коэн-Таннуджи К., Диу Б., Лалоз Ф. Квантовая механика/Пер. с фр. Л.Н. Новикова: в 2-х т. Т. 1. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2000. 944 с.
2. Садбери А. Квантовая механика и физика элементарных частиц/Пер. с англ. В.В. Толмачева. Москва: Мир, 1989. 487 с.
3. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. Вологда: ПФ Полиграфист, 2002. 719 с.
4. Boyd R.W. *Nonlinear Optics*, 4th ed. Academic Press, 2020. 634 p.
5. Loudon R. *The Quantum Theory of Light*, 3d ed. Oxford University Press, 2000. 448 p.
6. LaPierre R. *Getting Started in Quantum Optics*. Cham: Springer, 2022. 242 p.
7. Gerry C., Knight P. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005. 317 p.
8. Клышко Д.Н. *Фотоны и нелинейная оптика*. Москва: Наука, 1980. 254 с.
9. Yurke B., McCall S.L., Klauder J.R. SU(2) and SU(1,1) interferometers // *Phys. Rev. A*. 1986. Vol. 33, no. 6. P. 4033–4054.
10. Зубайри С.М., Скалли М.О. *Квантовая оптика*/Пер. с англ. А.А. Калачева [и др.]. Москва: Физматлит, 2003. 510 с.
11. Schnabel R. Squeezed states of light and their applications in laser interferometers // *Phys. Rep.* 2017. Vol. 684. P. 1–51.
12. Vahlbruch H. et al. Detection of 15 dB Squeezed States of Light and their Application for the Absolute Calibration of Photoelectric Quantum Efficiency // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 117, no. 11. Art. no. 110801.
13. Lvovsky A.I. *Squeezed Light // Photonics: Scientific Foundations, Technology and Applications* / ed. Andrews D.L. John Wiley & Sons, 2015. P. 121–164.
14. Dutt A. et al. On-Chip Optical Squeezing // *Phys. Rev. Appl.* 2015. Vol. 3, no. 4. Art. no. 044005.
15. Mehmet M. et al. Squeezed light at 1550 nm with a quantum noise reduction of 123 dB // *Opt. Express*. 2011. Vol. 19, no. 25. P. 25763–25772.
16. Eisaman M.D. et al. Invited Review Article: Single-photon sources and detectors // *Rev. Sci. Instrum.* 2011. Vol. 82. Art. no. 071101
17. Мандель Л., Вольф Э. *Оптическая когерентность и квантовая оптика* / пер. с англ. С.Н. Андрианова [и др.]. Москва: Физматлит, 2000. 896 с.
18. Avella A. et al. Self consistent, absolute calibration technique for photon number resolving detectors // *Opt. Express*. 2011. Vol. 19, no. 23. P. 23249–23257.
19. Brida G. et al. Possibility of absolute calibration of analog detectors by using parametric downconversion: a systematic study // *J. Opt. Soc. Am. B*. 2006. Vol. 23, no. 10. P. 2185–2193.

20. Новикова Т.И., Леонтьев А.А., Китаева Г.Х. Измерение квантовой эффективности аналоговых детекторов в поле параметрического рассеяния света // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2022. Т. 116, № 6. Р. 343–349.

21. Cohen-Tannoudji С., Dupont-Roc J., Grynberg G. Atom-Photon Interactions. Basic Processes and Applications. Weinheim: WILEY-VCH, 2004. 678 p.

22. Deng H., Haug H., Yamamoto Y. Exciton-polariton Bose-Einstein condensation // Rev. Mod. Phys. 2010. Vol. 82, no. 2. P. 1489–1537.

Учебное издание

Алоджанц А.П., Бескачко В.П., Царёв Д.В., Куц Д.А.,
Подошведов С.А., Кулик С.П.

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПТИЧЕСКОЙ
КВАНТОВОЙ ИНФОРМАТИКИ

Учебное пособие

Под редакцией С.П. Кулика

Техн. редактор *А.В. Миних*
Дизайн обложки *А.С. Пановой*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 26.10.2023. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 5,11. Тираж 100 экз. Заказ 361/406

Отпечатано с оригинал-макета заказчика в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.