Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Институт естественных и точных наук

В.П. Бескачко, В.И. Заляпин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2019

УДК 517.98(075.8)
Б532

Одобрено
учебно-методической комиссией
института точных и естественных наук

Рецензенты:
М.М. Кипнис, В.Е. Федоров

Бескачко, В.П.
Б532 Математические основы квантовой механики: Учебное пособие / В.П. Бескачко, В.И. Заляпин.–Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2019. – 143 с.

Пособие предназначено студентам факультетов математики, механики и компьютерных наук (обучающимся по направлениям 01.03.01 - математика, 02.03.01 – математика и компьютерные науки, 01.03.02 – прикладная математика и информатика, 01.03.03 – механика и математическое моделирование) и физического (обучающихся по направлениям 03.03.01 – прикладные математика и физика, 03.03.02 – физика, 03.03.03 - радиофизика), изучающих элементы функционального анализа.

Изложение ведется на т.н. *физическом* уровне строгости, когда упор делается не столько на формальную технику доказательств тех или иных утверждений, сколько на содержательную интерпретацию вводимых понятий и связей между ними.

УДК 517.98(075.8)

Оглавление

Введение

Опытные данные, касающиеся корпускулярных свойств света (фотоэффект, эффект Комптона, тепловое излучение) с одной стороны, и волновых свойств частиц (дифракция) - с другой стороны, приводят к необходимости развития теории, уточняющей законы классической механики и электродинамики в отношении систем микроскопического, атомного масштаба. Такая теория, известная теперь как *квантовая механика*, была создана в Европе в начале прошлого века трудами многих выдающихся ученых, из которых отметим только датчанина Нильса Бора, немца Вернера Гейзенберга, австрийца Эрвина Шредингера и англичанина Поля Дирака. Современная математическая формулировка квантовой механики была дана в работах выдающегося венгерского математика Джона (Януша) фон Неймана.

Для количественной формулировки классической механики Исааку Ньютону потребовалось изобрести дифференциальное и интегральное исчисления, составившие раздел математики, называемый ныне математическим анализом. Математикам потребовалось около ста лет, чтобы довести этот раздел до состояния, отвечающего их представлениям об уровне строгости используемых в нем рассуждений. В отличие от классической механики, математические средства, необходимые для количественной формулировки квантовой механики, существовали еще до ее появления, но не были востребованы в физике. На рубеже 19 и 20 веков возникло понятие гильбертова пространства, появившегося как логическое следствие работ выдающегося немецкого математика Давида Гильберта, посвященных разложениям функций в ортогональные ряды и исследованию интегральных уравнений. Только два года потребовалось фон Нейману, чтобы показать, что естественным математическим аппаратом квантовой механики является один из разделов функционального анализа — теория линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. [8]

Последовательное и строгое изложение функционального анализа и, в частности, упомянутого его раздела не является целью настоящих лекций — для этого существуют специальные курсы (например [1, 3, 5] и многие другие). Мы удовольствуемся тем, что используем имеющиеся в нем понятия и результаты для достижения своих "корыстных"целей — количественного описания опытных данных о свойствах микроскопических систем. Для этого необходимо установить соответствие между абстрактными понятиями функционального анализа и дорогими сердцу каждого физика представлениями, такими как *состояние системы, наблюдаемая, измере-*

ние и т.п. Это соответствие оказывается не таким простым (лучше сказать — не таким привычным), как в классической механике, но оно приводит к результатам, хорошо согласующимся с опытом. В настоящее время квантовая механика, во всяком случае — ее нерелятивистский вариант, является одной из самых точных физических теорий. Вместе с теорией относительности она составляет фундамент современного естествознания.

Мы не предполагаем, что слушатели этого курса уже успели познакомиться с функциональным анализом. Однако, многие из необходимых нам сейчас понятий уже встречались при изучении других математических дисциплин: анализа, линейной алгебры, теории вероятностей. Наша задача заключается в том, чтобы привести эти понятия в систему и выработать язык, на котором в следующей части курса будут сформулированы основные принципы (аксиомы) квантовой механики. Поэтому изложение достаточно конспективно — определения, примеры, обсуждение основных свойств. Доказательства приводимых фактов в подавляющем большинстве отсутствуют, а основное внимание уделено интуитивно содержательному разъяснению вводимых понятий. Те немногочисленные доказательства, которые присутствуют в тексте, выделены значками ◄ – начало и ► – окончание доказательства.

Читатель, интересующийся полными доказательствами, может познакомиться с ними по многочисленным учебникам по функциональному анализу, часть из которых приведена в списке литературы.

Глава 1

Функциональные пространства

1.1. Множества

Под множеством будем понимать семейство (или совокупность) произвольных объектов, объединенных по какому-нибудь признаку, качеству или свойству. Относительно произвольных объектов будем считать выполненным ровно одно из следующих утверждений: либо элемент принадлежит множеству, либо он этому множеству не принадлежит. Если A — множество, а a — элемент этого множества, то факт принадлежности этого элемента множеству будем записывать так: $a \in A$. Если объект a не является элементом множества A, то это будем записывать как $a \notin A$. Множество может быть пустым, т.е. не содержать ни одного элемента. Такое множество будем обозначать $\varnothing$.

Элементы множества будем еще называть *точками*.

Буквы $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ такого начертания обозначают множества натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел, соответственно. Прочие множества будем обозначать прочими прописными буквами латинского алфавита такого же, как выше ($\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{X} \ldots$), или обычного начертания ($A, B, X, \ldots$). Строчными латинскими буквами обозначают элементы этих множеств. Например, запись $A = \{a, b, c, d\}$ означает "множество A состоит из элементов a, b, c, d".

Множество A называется *подмножеством* множества X, если всякий элемент множества A является элементом множества X. При этом обычно пишут $A \subset X$. Очевидно, что любое множество является собственным подмножеством $A \subset A$, а пустое множество является подмножеством любого множества $\varnothing \subset A$. Если одновременно выполняется $A \subset X$ и $X \subset A$, то говорят, что множества A и X совпадают (равны) и записывают это как $A = X$. В противном случае пишут $A \neq X$.

При формулировке определений, утверждений и при проведении доказательств мы будем использовать логические *кванторы*[1]:

квантор существования $\exists$, квантор существования и единственности $\exists!$ и квантор всеобщности $\forall$, а также символы следования $\Rightarrow$ и эквивалентности высказываний $\Leftrightarrow$.

Указанные в скобках символы (:) и (|) читаются как *такой, что.* Например, запись: $\{n \in \mathbb{N}: \ n^2 = 9\}$ означает: *натуральное число n таково, что его квадрат равен 9*, а запись: $A = \{f(x) | f(0) = 0\}$, указывает, что множество A состоит из функций, обращающихся в ноль при нулевом значении аргумента. Значок $\Rightarrow$ читается как *следует* , *вытекает* , *тогда имеет место* и т.п. Например, запись:

$$x_0 = \mathrm{arglocextr} f(x) \cap \exists f'(x_0) \ \Rightarrow \ f'(x_0) = 0$$

означает: *если x_0 – точка локального экстремума и в этой точке существует производная, то эта производная равна нулю.* Двусторонняя стрелка ($\Leftrightarrow$) читается как *тогда и только тогда* , *если и только если, условие является необходимым и достаточным* и т.п. Утверждение : *число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3 одновременно* записывается так:

$$n \,\vdots\, 6 \ \Leftrightarrow \ (n \,\vdots\, 2) \cap (n \,\vdots\, 3).$$

В дальнейшем предполагается, что читатель знаком с основными операциями над множествами – объединением $(A \cup B)$, пересечением $(A \cap B)$ и дополнением (A^c) и их свойствами, в частности с тождествами де Моргана:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Важной характеристикой множества является запас элементов, из которых состоит это множество. Выше уже упоминалось *пустое множество* — $\varnothing$ — не содержащее ни одного элемента.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется *конечным.* Конечное множество можно задать перечислением всех его элементов: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Мощностью* конечного множества будем называть количество содержащихся в нем элементов и записывать это так: $|A| = n$, в частности $|\varnothing| = 0$.

[1]Кванторы - логические операции, с помощью которых по некоторому высказыванию получают новые высказывания, характеризующие область истинности исходного.

Если множество не является конечным, оно называется *бесконечным.* Для сравнения бесконечных множеств (с точки зрения запаса входящих в них элементов), используется понятие *эквивалентности.*

Два множества называются *эквивалентными*, если каждому элементу одного множества можно поставить в соответствие единственный элемент другого, и при этом каждому элементу второго множества отвечает единственный элемент первого. В этом случае говорят, что между множествами установлено *взаимнооднозначное соответствие.* Образно говоря, элементы этих множеств попарно связаны

$$\forall a \in A,\ \exists!\ b \in B \text{ и } \forall b \in B,\ \exists!\ a \in A: \quad a \ \leftrightarrow \ b.$$

Если множества A и B — эквивалентны, то пишут $A \sim B$. Справедливы следующие свойства эквивалентных множеств:

$$A \sim A,\ A \sim B \Leftrightarrow B \sim A,\ (A \sim B) \cap (B \sim C) \Rightarrow A \sim C.$$

Таким образом, все множества можно разбить на непересекающие классы множеств.

Множества, входящие в один класс, назваются *равномощными*, и считается, что все множества из одного класса имеют один и тот же запас элементов.

Для конечных множеств равномощность означает совпадение количества элементов в этих множествах — *два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое количество элементов.*

Для бесконечных множеств, строго говоря, это уже не так. Самой "маленькой" бесконечностью является бесконечность множества натуральных чисел. Всякое множество, равномощное множеству натуральных чисел[2], называется *счетным.* Счетную мощность обычно обозначают символом $\aleph_0$ (читается *алеф-нуль*) и пишут $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Если множество счетно, то мы уже не в состоянии выписать все его элементы, однако они могут быть упорядочены. В соответствии с определением, элементы счетного множества могут быть занумерованы натуральными числами: если A — счетно, то $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$

Достаточно просто установить, что числовые множества $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ – счетные, т.е., грубо говоря, запас элементов в этих множествах такой же, как и в

[2] В том числе, конечно, и само множество $\mathbb{N}$.

множестве $\mathbb{N}$, хотя очевидно, что, например, целых чисел "больше" чем натуральных.[3]

Не все бесконечные множества равномощны. Существуют множества, запас элементов в которых отличается (а, значит, больше!) от запаса элементов в множестве натуральных чисел. Например, множество $I = \{x : 0 \le x \le 1\}$ счетным не является, как и, например, множества $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, множество точек на плоскости, в пространстве и т.п.

Всякое множество, эквивалентное (равномощное) множеству $\mathbb{R}$ действительных чисел, называется множеством мощности *континуум*. Обозначение: $|\mathbb{R}| = \aleph_1$[4]. Все перечисленные выше множества, а также множество точек в любом отрезке, в любом прямоугольнике или круге, любом параллелепипеде, множество всех точек любого конечномерного пространства, множество непрерывных функций, определенных на отрезке и т.п., имеют мощность континуума.[5]

В заключение заметим, что если множество бесконечно, у него обязательно имеется счетное подмножество.

1.2. Пространства и структуры

Концепция *пространства* в математике широко используется в самых разных конструкциях.

Под пространством понимается любое множество абстрактных (т.е. не снабженных описанием их природы или происхождения) или конкретных (т.е. снабженных таким описанием) элементов, наделенное *структурой*. Структуры, которыми может наделяться пространство, обычно связаны с возможностью производить над элементами пространства некоторые действия и/или устанавливать между элементами пространства некоторые отношения. Одни и те же элементы могут образовывать различные пространства, в зависимости от того, какой структурой и в какой форме наделено пространство.

Говорят, что пространство является *функциональным*, если составляющие его элементы — функции[6].

[3] Это качество бесконечных множеств — быть равномощными своим собственным подмножествам — может служить определением бесконечного множества.

[4] Часто континуальную мощность обозначают также латинской буквой "c".

[5] Существуют бесконечные множества и более высокой мощности, чем континуальная. Так, например, множество *всех* функций, определенных на отрезке, имеет большую мощность. Для наших целей в дальнейшем можно ограничиться множествами, мощность которых не выше континуальной.

[6] Чаще всего, обладающие каким-то наперед оговоренным свойством — ограниченные, непрерывные, дифференцируемые и т.п.

2.1. Метрические пространства

Говорят, что в пространстве задана *метрика*, или, что то же самое, пространство наделено *метрической структурой*, если для любой пары элементов некоторого множества M определено правило измерения расстояний между этими элементами, т.е. $\forall\ a, b \in M$ задана функция $\mu(a;b)$, такая что

$$\begin{array}{ll} 1. & \mu(a;b) \geq 0,\ \mu(a;b) = 0 \Leftrightarrow a = b \\ 2. & \mu(a;b) = \mu(b;a); \\ 3. & \mu(a;c) \leq \mu(a;b) + \mu(b;c). \end{array} \tag{1.2.1}$$

Требование 2 называется симметричностью метрики, требование 3 — неравенством треугольника.

Множество M, в котором задана метрика, называется *метрическим пространством* и обычно обозначается парой символов (M, μ), где M – множество элементов (или точек) пространства, μ – метрика.

Примеры

I. Произвольное множество X, на котором метрика задается соотношением

$$\forall x, y \in X \quad \mu(x,y) = 0,\ x = y,\ \mu(x,y) = 1,\ x \neq y$$

образует метрическое пространство. Аксиомы метрики легко проверяются. Такая метрика называется *дискретной.*

II. Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ с обычным расстоянием $\mu(x;y) = |x - y|$ образует метрическое пространство.

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ с расстоянием $\mu(u;v) = |u - v|$ образует метрическое пространство.

III. Множество упорядоченных пар $x = (x_1;x_2)$ действительных чисел с метрикой $\mu(x;y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ — метрическое пространство. Его обычно обозначают $\mathbb{R}^2$.

Множество упорядоченных пар $u = (u_1;u_2)$ комплексных чисел с метрикой $\mu(u;v) = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2}$ — метрическое пространство. Его обычно обозначают $\mathbb{C}^2$.

Аналогично определяются пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ для любого натурального значения n – это множества упорядоченных наборов $u = (u_k)_1^n$ из n действительных (комплексных) чисел, с метрикой

$$\mu(u;v) = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + \cdots + |u_n - v_n|^2}.$$

IV. Множество упорядоченных пар $x = (x_1;x_2)$ действительных чисел с метрикой $\mu(x;y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ — метрическое пространство. Оно отличается от пространства примера II — здесь другая метрика.

V. Пусть X — совокупность функций[7], определенных и непрерывных на отрезке $[a;b]$. Зададим метрику на этом множестве функций соотношением

$$\mu(f,\varphi) = \max|f(x) - \varphi(x)|.$$

Требования 1 – 3 легко проверяются, X — метрическое пространство.

Обычно совокупность функций X с так определенной метрикой (она называется чебышёвской) обозначают $C_{[a;b]}$.

VI. Множество X — такое же, как и в примере V, а правило измерения расстояний задается соотношением

$$\mu(f,\varphi) = \int\limits_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx.$$

Заметим, что требование 2 очевидно выполняется, равно как и первая часть требования 1.

Для второй части получаем. ◀ Если $f = \varphi$, то, конечно $\mu(f,\varphi) = 0$.

Пусть теперь $\mu(f,\varphi) = 0$. Заметим, что функция, стоящая под знаком интеграла, *непрерывна* и неотрицательна. Из курса математического анализа известно, что если интеграл от неотрицательной непрерывной[8] функции равен нулю, то и функция эта тождественно равна нулю. Отсюда следует, что $f(x) \equiv \varphi(x)\ \forall x \in [a;b]$.▶

Для доказательства неравенства треугольника положим $u = f - \psi,\ v = \psi - \varphi$ и воспользуемся неравенством $|u + v| \le |u| + |v|$. Для этого пространства принято одно из следующих обозначений $\tilde{L}_{[a;b]},\ CL_{[a;b]},\ L^C_{[a;b]}$.

VII. Множество X — такое же[9], как и в примерах V - VI. Если $p > 1$, то правило измерения расстояний задается соотношением

$$\mu(f,\varphi) = \sqrt[p]{\int\limits_a^b |f(x) - \varphi(x)|^p dx}.$$

Как и выше, свойства 1-2 метрики очевидны. Некоторую, (не совсем простую!), проблему представляет установление справедливости неравенства треугольника.

В этом нам помогут несколько классических неравенств.

Неравенство Д. Бернулли *Пусть γ — произвольное действительное число, $t \ge -1$. Тогда*

$$\begin{array}{l} (1+t)^\gamma \le 1 + \gamma t,\ 0 < \gamma < 1 \\ (1+t)^\gamma \ge 1 + \gamma t,\ \gamma < 0 \cup \gamma > 1. \end{array} \tag{1.2.2}$$

◀ Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(t) = (1+t)^\gamma - 1 - \gamma t$. Легко видеть, что при $0 < \gamma < 1$ в точке $t = 0$ функция $\varphi(t)$ достигает своего максимума, равного нулю. Следовательно, при

$$t > -1 \quad \varphi(t) \le 0 \ \Rightarrow\ (1+t)^\gamma \le 1 + \gamma t \le 0.$$

[7]В квантовой механике, как правило, функции предполагаются комплекснозначными

[8]Если непрерывности нет, то это утверждение неверно.

[9]Т.е., непрерывные комплекснозначные функции.

Аналогично, для значений $\gamma < 0 \cup \gamma > 1$ у функции $\varphi(t)$ в точке $t = 0$ – минимум, откуда второе неравенство.

Полученное неравенство называется *неравенством Д.Бернулли*, если $\gamma = n \in \mathbb{N}$. ►

Неравенство У. Юнга *При* $a \geq 0,\ b > 0,\ p > 1,\ \dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$ *справедливо неравенство*

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{1.2.3}$$

◄ Пусть $0 < \gamma < 1,\ t \geq -1$. В этом случае, как доказано выше, справедливо неравенство

$$(1+t)^{\gamma} \leq 1 + \gamma t.$$

Положив в этом неравенстве $\dfrac{a}{b} = 1 + t,\ p = \dfrac{1}{\gamma},\ q = \dfrac{p}{p-1}$. и заметив, что при такой подстановке $a \geq 0,\ b > 0,\ p > 1,\ q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, мы приходим к неравенству

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 + \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b} - 1\right) \ \Rightarrow \frac{a^{\frac{1}{p}}}{b^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b}.$$

Умножая последнее выражение на $b \neq 0$ и учитывая, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, получаем *неравенство Юнга*:

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Если теперь ввести новые обозначения, положив $a^{\frac{1}{p}} = u,\ b^{\frac{1}{q}} = v$, то неравенство Юнга запишеться в виде

$$u \cdot v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}. \ ►$$

Замечание. Если $\gamma > 1$, *то* $p < 1$ *и неравенство Юнга меняет знак*

$$u \cdot v \geq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

Неравенство О. Гёльдера для интегралов *Пусть*[10] $p > 1,\ \dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$, *тогда для любых функций* $u(t)$, p*-ая степень которых интегрируема на отрезке*

[10] Мы доказываем неравенства Гёльдера и (ниже) Минковского для интегралов. Точно также можно доказать аналогичные неравенства для сумм и рядов.

$[a;b]$, и $v(t)$, q-ая степень которых интегрируема на отрезке $[a;b]$, имеет место неравенство[11]*:*

$$\left|\int_a^b u(t)\overline{v}(t)dt\right| \le \left(\int_a^b |u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |v(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (1.2.4)$$

◀ Положим в неравенстве Юнга

$$a = \frac{|u|^p}{\int\limits_a^b |u|^p dt}, \quad b = \frac{|v|^q}{\int\limits_a^b |v|^q dt}$$

и проинтегрируем получившееся соотношение на промежутке $[a;b]$:

$$\frac{\int |u||v|dt}{\left(\int |u|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int |v|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}\frac{\int |u|^p dt}{\int |u|^p dt} + \frac{1}{q}\frac{\int |v|^q dt}{\int |v|^q dt} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\left|\int_a^b u(t)\overline{v}(t)dt\right| \le \int_a^b |u(t)||v(t)|dt \le \left(\int_a^b |u|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |v|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \blacktriangleright$$

При $p = q = 2$ неравенство Гёльдера называется *неравенством Коши-Буняковского.*

Неравенство Г. Минковского для интегралов *Если $p > 1$ и функции u, v интегрируемы с p-ой степенью на отрезке $[a;b]$, то справедливо неравенство*:

$$\left(\int_a^b |u(t)+v(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |v(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.2.5)$$

◀ Рассмотрим

$$\int_a^b |u(t)+v(t)|^p dt = \int_a^b |u(t)+v(t)|^{p-1}|u(t)+v(t)|dt \le$$

[11] Везде далее черточка над символом означает комплексное сопряжение: если $z = x+iy$, то $\overline{z} = x-iy$.

$$\leq \int\limits_a^b |u(t)+v(t)|^{p-1}|u(t)|dt + \int\limits_a^b |u(t)+v(t)|^{p-1}|v(t)|dt.$$

Применяя к каждому из слагаемых в правой части последнего соотношения неравенство Гёльдера, получаем:

$$\int\limits_a^b |u(t)+v(t)|^{p-1}|u(t)|dt \leq \left(\int\limits_a^b |u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_a^b |u(t)+v(t)|^{(p-1)q} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

и

$$\int\limits_a^b |u(t)+v(t)|^{p-1}|v(t)|dt \leq \left(\int\limits_a^b |v(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_a^b |u(t)+v(t)|^{(p-1)q} dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Учитывая, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ влечет равенство $(p-1)q=p$, и складывая последние неравенства, приходим к неравенству:

$$\int |u+v|^p dt \leq \left(\int |u+v|^p dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int\limits_a^b |u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_a^b |v(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

из которого и следует искомое, в силу равенства $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$. ▶

VII. Продолжение. Теперь, для того, чтобы убедиться, что обсуждаемая метрика удовлетворяет неравенству треугольника, достаточно положить $f-\psi=u,\ \psi-\varphi=v,\ f-\varphi=u+v$ и воспользоваться неравенством Минковского.

Подчеркнем, что пространства примеров V, VI и VII — различны, несмотря на тождественность составляющих их элементов. Это различие вызвано различием их метрических структур.

Если (M,μ) – пространство, элементами которого служат точки множества M с метрикой μ, а $X\subset M$ – произвольное подмножество множества M, то (X,μ) – также метрическое пространство. Оно называется *подпространством* метрического пространства (M,μ).

Наличие метрики позволяет говорить о *близких* или *далёких* элементах метрического пространства. Ясно, что элементы, близкие в пространстве (M,μ) будут столь же близки и в пространстве $(X,\mu),\ X\subset M$.

Точки и окрестности

Наличие метрической структуры дает возможность ввести на множестве элементов метрического пространства понятие *окрестности*.

Пусть (M, μ) — метрическое пространство, $x_0 \in M$ — элемент (точка) этого пространства.

Открытым шаром с центром в точке $x_0 \in M$ называется множество $S^r_{x_0} = \{x \in M : \ \mu(x; x_0) < r\}$. Число $r > 0$ называется радиусом шара.

Окрестностью точки $x_0 \in M$ будем называть множество точек $x \in M$, содержащихся в шаре, с центром в точке x_0.

Подмножество X множества M называется *ограниченным*, если существует шар $S^r_{x_0}$, такой, что $X \subset S^r_{x_0}$.

Пусть теперь $X \subset M$. Если у точки $x_0 \in X$ есть окрестность, целиком состоящая из точек множества X, то такая точка называется *внутренней* точкой множества X.

Если в любой окрестности точки x_0 есть по крайней мере одна точка множества X, отличная от x_0, то точка x_0 называется *предельной*[12] точкой множества X.

Подмножество X множества M называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Подмножество X множества M называется *замкнутым*, если оно является дополнением к открытому в M.

Справедливо следующее утверждение:

Подмножество X множества M замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Если к множеству X присоединить все его предельные точки, то получится множество, называемое *замыканием* множества X и обычно обозначаемое $\overline{X}$. Ясно, что замыкание $\overline{X}$ — замкнутое множество.

Все метрическое пространство открыто и замкнуто одновременно.

Пусть подмножества X и Y множества M таковы, что $X \subset Y$ и $Y \subset \overline{X}$. Тогда говорят, что множество X *плотно* в Y. Если X плотно в M, то оно называется *всюду плотным*, при этом $\overline{X} = M$.

Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Образно говоря, в сепарабельном пространстве существует счетный каркас — какую бы точку пространства ни взять, сколь угодно близко к ней найдется точка счетного множества.

Примеры

I. В пространстве действительных чисел $\mathbb{R}$ с обычным расстоянием $\mu(x; y) = |x - y|$ множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел всюду плотно. $\mathbb{R}$ — сепарабельно.

Аналогично, сепарабельными являются пространства $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

[12] Заметим, что предельная точка множества X может и не принадлежать этому множеству.

II. Рассмотрим в пространстве $C_{[a;b]}$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций множество многочленов с рациональными коэффициентами. Легко установить, что это множество счетное. Заметим, далее, что всякий многочлен с произвольными коэффициентами может быть с любой степенью точности приближен многочленами с рациональными коэффициентами.

◀ Действительно, Пусть $P = \sum_0^n a_k x^k$ – многочлен с произвольными, а $P_Q = \sum_0^n r_k x^k$ – с рациональными коэффициентами. Заметим, что вседа можно подобрать коэффициенты r_k так, что будет выполняться

$$|a_k - r_k| \le \frac{\varepsilon}{(n+1)|b|^k}.$$

В силу неравенства

$$|P - P_Q| \le \sum_0^n |a_k - r_k||x|^k \le \sum_0^n |a_k - r_k||b|^k$$

при этом будет выполняться

$$|P - P_Q| \le \varepsilon,$$

т.е. совокупность многочленов с рациональными координатами плотна в множестве всех многочленов.▶

А в силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса (например [5]), любую непрерывную функцию с любой степенью точности можно приблизить многочленом, откуда и следует сепарабельность пространства $C_{[a;b]}$.

III. Пусть $P_\varepsilon(t)$ – многочлен с рациональными коэффициентами, аппроксимирующий непрерывную функцию $x(t)$ с точностью не хуже ε, Сепарабельность пространств $\tilde{L}^p_{[a;b]}$, $p \ge 1$ следует из очевидного неравенства

$$\mu(x, P_\varepsilon) = \left(\int\limits_a^b |x(t) - P_\varepsilon(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon \sqrt[p]{b-a}.$$

IV. Если X – не более чем счетное множество с дискретной метрикой[13], то такое метрическое пространство, очевидно, сепарабельно.

V. Если X — несчетное множество с дискретной метрикой, то такое метрическое пространство несепарабельно.

◀ Действительно, если такое пространство сепарабельно и $\mathcal{S}$ – счетное, всюду плотное в X множество, то, выбрав некоторое значение $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$, рассмотрим множество шаров, центры которых расположены в точках множества $\mathcal{S}$ и радиус которых не превышает ε . По крайней мере в одном из этих шаров содержится не менее двух точек $x \ne y$ пространства X (в противном случае X – счетно). Для этих точек, используя неравенство треугольника, получаем:

$$1 = \mu(x, y) < 2\varepsilon < 1.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.▶

VI. Пусть X – совокупность кусочно-непрерывных[14] на отрезке $[a;b]$ функций. Зададим метрику на этом множестве соотношением:

$$\forall x, y \in X: \quad \mu(x, y) = \sup_{t \in [a;b]} |x(t) - y(t)|.$$

[13] Т.е., $\mu(x, y) = 1,\ x \ne y,\ \mu(x, y) = 0,\ x = y$

[14] Т.е. функций, с конечным числом точек разрыва, в каждой из которых существуют односторонние пределы.

Кусочно-непрерывные функции с таким образом заданной метрикой образуют метрическое пространство. Его обычно обозначают $\tilde{KC}_{[a;b]}$. Это пространство несепарабельно.

◀ Пусть $\forall \tau \in [a;b]$, $\chi_\tau(t)$ — функция, задаваемая соотношением:

$$\chi_\tau(t) = \begin{cases} 1 & t \geq \tau, \\ 0 & t < \tau \end{cases} .$$

Легко видеть, что для $\tau_1 \neq \tau_2$ $\mu(\chi_{\tau_1};\chi_{\tau_2}) = 1$. Если, как и выше, $\mathcal{S}$ – счетное, всюду плотное в X множество, то, рассмотрим множество шаров, центры которых расположены в точках множества $\mathcal{S}$ и радиус которых не превышает $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$. По крайней мере в одном из шаров содержится не менее двух функций χ_τ, $\tau_1 \neq \tau_2$. Если x_0 – центр этого шара, то одновременно $\mu(x_0, \chi_{\tau_1}) < \varepsilon$ и $\mu(x_0, \chi_{\tau_2}) < \varepsilon$ и неравенство треугольника дает $\mu(\chi_{\tau_1};\chi_{\tau_2}) < 1$.

Полученное противоречие доказывает утверждение.▶

В завершение обсуждения сепарабельности отметим, что может быть доказано (например, [12]) следующее утверждение.

Теорема. *Если (M, μ) – сепарабельное метрическое пространство, $X \subset M$ — его подпространство, то метрическое пространство (X, μ) – сепарабельно.*

2.2. Сходимость в метрических пространствах. Полнота.

Пусть (M, μ) – метрическое пространство, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность элементов (точек) этого пространства.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу $x \in M$, или, что элемент $x \in M$ является пределом последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall n > n_0 : \quad \mu(x; x_n) < \varepsilon.$$

При этом пишут $x_n \to x, n \to \infty$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Легко установить, что если последовательность сходится, то имеют место следующие простые утверждения:

1. Предел последовательности элементов метрического пространства определен единственным образом.

2. Вне любого шара, с центром в точке x, находится лишь конечное число членов последовательности, сходящейся к x. Соответственно, внутри любого такого шара находится бесконечное число членов последовательности.

3. Сходящаяся последовательность — ограничена[15].

[15] Обратное утверждение, конечно, неверно

4. Последовательность сходится тогда и только тогда, когда все её подпоследовательности сходятся к одному и тому же пределу.

5. Метрика — непрерывная функция своих аргументов относительно введенной сходимости:

   если $x_n \to x, y_n \to y$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mu(x_n; y_n) = \mu(x; y)$.

Последовательность элементов метрического пространства называется *фундаментальной*, если, с увеличением номера, члены последовательности неограниченно сближаются:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \; \forall n, m > n_0 : \quad \mu(x_n; x_m) < \varepsilon.$$

Заметим, что если последовательность обладает свойством фундаментальности в метрическом пространстве, то она будет фундаментальной и в любом подпространстве, её содержащем.

Если же последовательность сходится в метрическом пространстве, то в подпрооcтранстве она обязательно будет фундаментальной, но не обязательно сходящейся.

Любая *сходящаяся* последовательность элементов метрического пространства — фундаментальная. *Однако, если последовательность — фундаментальна, она сходящейся может и не быть.*

Образно говоря, члены фундаментальной, но не сходящейся последовательности, собираются вокруг "дырки" в пространстве, В том месте, к которому они неограниченно приближаются нет элемента этого пространства.

Примеры

I. Рациональные числа $\mathbb{Q}$ с метрикой $\mu(r_1; r_2) = |r_1 - r_2|$ образуют метрическое пространство[16]. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность рациональных чисел, задаваемая соотношением $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Из курса математического анализа известно, что на *множестве действительных чисел* эта последовательность сходится и её предел равен $e \approx 2,718281828...$. Из сходимости этой последовательности на *множестве действительных чисел* следует её фундаментальность, т.е. близость далеких членов последовательности друг к другу. Эта близость сохраняется и в подпространстве рациональных чисел.

Однако, на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел эта последовательность сходящейся не является.

II. Рассмотрим пространство $\mathcal{P}$ многочленов, определенных на отрезке $[0; 1]$ с чебышёвской метрикой $\mu(P; Q) = \max |P(t) - Q(t)|$.

[16]Это подпространство пространства действительных чисел.

Положим

$$P_n(x) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}.$$

Последовательность многочленов P_n — фундаментальная. Действительно, пусть для определенности $m < n$:

$$\mu(P_n; P_m) = \max\left|\frac{t^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{t^{m+2}}{(m+2)!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right|,$$

но, поскольку $0 \leq t \leq 1$ и $k! \geq 2^{k-1}$, постольку

$$\left|\frac{t^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{t^{m+2}}{(m+2)!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right| \leq \frac{1}{2^{m-1}} \to 0.$$

Однако, в рассматриваемом пространстве эта последовательность не сходится. Действительно, если P_0 – многочлен, такой что $P_0 = \lim P_n$, то этот же многочлен является пределом той же последовательности в пространстве $C_{[0;1]}$ непрерывных функций, подпространством которого является $\mathcal{P}$. В силу единственности предела в $C_{[0;1]}$ это значит, что функция $e^t \equiv P_0$, что неверно.

III . Рассмотрим пространство $\tilde{L}^p_{[-1;1]}$, $p > 1$ (пример VII пункта 1.2.1) и в нем последовательность функций (рис.1.1, слева)

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ +1, & \frac{1}{n} \leq t \leq +1 \end{cases}, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Эта последовательность фундаментальна в $\tilde{L}^p_{[-1;1]}$.

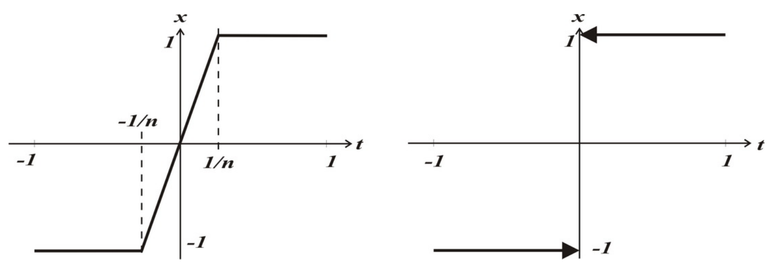

Рис. 1.1. Функции $x_n(t)$ (слева) и поточечный предел $\varphi(t)$ (справа)

◀ Т.к. $\forall n: \ |x_n(t)| \leq 1$, то $|x_n - x_m| \leq |x_n| + |x_m| \leq 2$, откуда (для определенности считаем, что $m < n$):

$$\mu^p(x_n; x_m) = \int\limits_{-1}^{1} |x_n - x_m|^p dt \leq \int\limits_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |x_n - x_m|^p dt \leq \frac{2^{p+1}}{m} \to 0$$

В то же время, эта последовательность не имеет предела в пространстве $\tilde{L}^p_{[-1;1]}$.

Действительно, если $x(t)$ — это предел рассматриваемой последовательности в $\tilde{L}^p_{[-;1]}$, то $x(t)$ должна быть непрерывна на отрезке $[-1; 1]$. Заметим, что наша последовательность сходится в обычном смысле в каждой точке отрезка $[-1; 1]$, за исключением точки $x = 0$, к функции (рис.1.1 справа)

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t < 0 \\ +1, & 0 < t \leq 1 \end{cases}.$$

Положим $g(t) = |x(t) - \varphi(t)|$. Так определенная функция непрерывна и неотрицательна во всех точках отрезка $[-1;1]$, за исключением точки $x = 0$, в которой она не определена. Рассмотрим

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \int_{-1}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{1} g(t)dt = 0.$$

В силу непрерывности и неотрицательности $g(t)$ на каждом из полупромежутков $[-1;0)$ и $(0;1]$ заключаем, что

$$\int_{-1}^{0} g(t)dt = \int_{0}^{1} g(t)dt = 0,$$

а, следовательно, $g(t) \equiv 0$ на этих полупромежутках. Отсюда $x(t) \equiv \varphi(t)$ во всех точках отрезка $[-1;1]$, за исключением точки 0. Но такая функция $x(t)$ не может быть непрерывной в нуле, т.к.

$$\lim_{t \to x_0 -} x(t) = \lim_{t \to x_0 -} \varphi(t) = -1, \quad \lim_{t \to x_0 +} x(t) = \lim_{t \to x_0 +} \varphi(t) = +1,$$

чем доказательство и завершается.▶

Как уже отмечалось выше, на одном и том же множестве элементов можно определять *различные* метрики, получая при этом *различные* метрические пространства. Эта разница может сказываться на свойствах сходящихся и фундаментальных последовательностей. Может оказаться, что последовательность, фундаментальная (сходящаяся) в одной из метрик, не будет таковой в другой метрике.

Но не исключено, что две различные метрики, определенные на одном и том же множестве элементов обладают тем свойством, что любая последовательность, фундаментальная (сходящаяся) в одной из метрик, будет фундаментальной (сходящейся) и в другой. Такие метрики будем называть эквивалентными.

Теорема. *Метрики μ_1 и μ_2, определенные на одном и том же множестве X, эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют положительные числа $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ такие, что для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство:*

$$\gamma_1 \cdot \mu_1(x,y) \leq \mu_2(x,y) \leq \gamma_2 \cdot \mu_1(x,y).$$

Так, например, на множестве $X = \mathbb{R}^2$ метрики

$$\mu_1(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \quad \mu_2(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

эквивалентны, поскольку для них справедливы неравенства:

$$1 \cdot \mu_1(x,y) \leq \mu_2(x,y) \leq \sqrt{2} \cdot \mu_1(x,y)$$

◀ Для метрики $\mu_2(x,y)$, используя неравенство Коши-Буняковского заключаем

$$\mu_2^2(x,y) = (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)^2 \leq 2(|x^1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2) = 2\mu_1^2(x,y),$$

откуда правая часть неравенства. Левая часть следует из очевидных выкладок:

$$\mu_2^2(x,y) = (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)^2 = |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + 2|x_1 - y_1||x_2 - y_2| \geq$$

$$\geq |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2. \blacktriangleright$$

Пример неэквивалентных метрик дает нам чебышёвская метрика $\mu_1(x,y) = \max|x - y|$ и L^p-метрика $\mu_2(x,y) = \left(\int\limits_{-1}^{1} |x(t) - y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ на множестве функций непрерывных на отрезке $[-1;1]$,

◀ Пусть $x_n(t)$ – последовательность функций, рассмотренная выше (пример III настоящего раздела). Эта последовательность, как там было показано, фундаментальна в $\tilde{L}^p_{[-1;1]}$. В то же время, $\max|x_n - x_m| = |1 - \dfrac{m}{n}|$ и с ростом m,n эта величина не стремится к нулю. Т.е., последовательность $x_n(t)$ фундаментальной в чебышёвской метрике не является. ▶

Изометрия. Пополнение метрических пространств

Метрические пространства, в которых существуют фундаментальные, но не сходящиеся последовательности, называются *неполными*. Соответственно, если в метрическом пространстве *каждая фундаментальная последовательность является сходящейся*, оно называется *полным*.

Например, пространство $C_{[a;b]}$ примера V из раздела 1.2.1 — полное.

◀ Действительно, пусть $x_n(t)$ — фундаментальная в $C_{[a;b]}$ последовательность:

$$\max|x_n(t) - x_m(t)| \to 0, \forall n > m \to \infty.$$

Последнее соотношение означает, что последовательность $x_n(t)$ *равномерно* сходится на отрезке $[a;b]$. Из курса анализа известно, что равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к функции непрерывной, откуда и следует полнота пространства $C_{[a;b]}$.▶

В то же время, пространства $\tilde{L}^p_{[a;b]}$, $p \geq 1$ — неполные, как свидетельствует пример III, рассмотренный выше.

Однако, оказывается, что всякое неполное метрическое пространство всегда можно пополнить.

Пусть (M_1,μ_1) и (M_2,μ_2) — метрические пространства, и пусть установлено взаимнооднозначное соответствие $f: M_1 \leftrightarrow M_2$ между элементами этих пространств так, что если $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ то $\mu_1(x_1,x_2) =$

$\mu_2(y_1, y_2)$ $\forall x_1, x_2 \in M_1$. В этом случае говорят, что метрические пространства *изометричны.*

С точки зрения метрики такие пространства неразличимы — всякое утверждение о расстояниях в одном из пространств имеет идентичный аналог в другом. Справедлива следующая теорема.

Теорема. (О пополнении метрических пространств.)

Пусть (M, μ) – неполное метрическое пространство. Существует полное метрическое пространство $(\mathbf{M}, \mu_{\mathbf{M}})$ такое, что всюду плотное в нем подпространство $(\tilde{M}, \mu_{\mathbf{M}})$ изометрично исходному пространству (M, μ).

Пространство $(\mathbf{M}, \mu_{\mathbf{M}})$ называется *пополнением* пространства (M, μ).

В упомянутом выше смысле (т.е., если не различать изометричные подпространства), пополнение содержит пространство (M, μ) в качестве всюду плотного подпространства.

◀ Если не останавливаться на технических подробностях доказательства этой теоремы (например,[3] или [5]), то идейно процедура пополнения состоит в добавлении к неполному пространству некоторых идеальных, в нем отсутствующих элементов, которые заполняют имеющиеся в неполном пространстве "дыры".

Подробнее, назовем две фундаментальные последовательности $(x_n), (y_n) \in M$ эквивалентными, если $\lim(x_n - y_n) = 0$. При этом совокупность всех *фундаментальных* последовательностей разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных.

Если среди последовательностей, входящих в данный класс, есть сходящаяся, то все прочие последовательности из этого класса также сходятся, причем к одному и тому же элементу пространства (M, μ), скажем x_0. В частности, в этом классе есть (единственная!) стационарная последовательность $x_0, x_0, \ldots, x_0, \ldots$, которая может служить "меткой" рассматриваемого класса..

Если же хотя бы одна из последовательностей, входящих в данный класс, не сходится, то и все прочие последовательности из этого класса не сходятся, и в качестве "метки" этого класса возьмем любую из последовательностей в него входящих.

Элементами пополнения, о котором идет речь в теореме, будут "метки" классов фундаментальных последовательностей. При этом роль подпространства, изометричного исходному, будет играть совокупность "меток" классов сходящихся последовательностей. ▶

Отметим, что *подпространство полного пространства полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.* В пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ любое подпространство полно. В пространствах $C_{[a;b]}$, $L^p_{[a;b]}$, l^p это уже не так, как показывает анализ приведенных выше[17] примеров.

Заканчивая обсуждение понятия полноты, сформулируем следующий *критерий полноты метрического пространства*:

Теорема [5] (О вложенных шарах).

[17] См. страницы 19-21.

Метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет хотя бы одну общую точку.

Компактность в метрических пространствах

Пусть (M, μ) — метрическое пространство, (X, μ), $X \in M$ – его собственное подпространство и A – некоторое подмножество множества X. Пусть, далее, множество A открыто в (X, μ). Будет ли оно открытым в (M, μ)? Как показывает следующий пример, не обязательно.

Возьмем в качестве (M, μ) плоскость $\mathbb{R}^2$ с квадратичной метрикой, в качестве X – ось OX на этой плоскости, в качестве A – произвольный интервал $(a; b)$ на этой оси. Очевидно, что в X это множество открыто, в то время как в $\mathbb{R}^2$ не является ни открытым, ни замкнутым.

Таким образом, свойство множества быть открытым зависит от пространства, в котором мы рассматриваем это множество. Это же справедливо и для свойства замкнутости.

При рассмотрении различных проблем в метрических пространствах такое положение не очень удобно и хотелось бы иметь характеристику множеств, подобную открытости и/или замкнутости, лишенную подобного недостатка.

В качестве такой характеристики обычно рассматривают свойство *компактности* множества.

Множество A в метрическом пространстве (M, μ) называется компактным, если из всякой последовательности $\{a_n\}_1^\infty \in A$ можно выделить сходящуюся в A подпоследовательность.

Известно, что в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ множество компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто. В произвольных метрических пространствах это уже не так.

- Рссмотрим метрическое пространство l^2, элементами которого являются последовательности действительных чисел, такие, что ряд составленный из их квадратов, сходится. Напомним, что метрика в l^2 задается соотношением $\mu(x, y) = \sqrt{\sum |x_i - y_i|^2}$. Пусть $S_0^1 = \{x \in l^2 : \ \mu(x; 0) \leq 1\}$ – замкнутый шар радиуса 1 с центром в нуле. Это ограниченное и замкнутое в l^2 множество. Рассмотрим последовательность $\{e_n, \ n = 1, 2, \ldots\}$ векторов, у которых все компоненты – нули, кроме компоненты, стоящей на n-ой позиции, которая равна 1. В силу $\mu(e_n; 0) = 1$ все e_n лежат в шаре S_0^1. Однако, выделить сходящуюся подпоследовательность из этой последовательности невозможно, в силу того, что $\forall m, n \ \mu(e_n; e_m) = \sqrt{2}$ и это расстояние не стремится к нулю при $n, m \to +\infty$.

- Пусть $C_{[0;1]}$ – метрическое пространство непрерывных на отрезке $[0; 1]$ функций с чебышёвской метрикой $\mu(x, y) = \max |x - y|$. Пусть $S_0^1 = \{x : \ \mu(x, 0) \leq 1\}$ – единичный шар в $C_{[0;1]}$. Он, как легко видеть, ограничен и замкнут.

Рассмотрим последовательность $a_n = \sin(2^n \pi t)$. Поскольку $\forall t: \ |\sin(2^n\pi t)| \le 1$, то $a_n \in A$. Зафиксируем некоторое значение n и пусть $m > n$ – произвольное. В любой точке t_0 отрезка $[0;1]$ выполняется

$$\mu(a_n; a_m) \ge |\sin(2^n\pi t_0) - \sin(2^m \pi t_0)|.$$

Возьмем $t_0 = 2^{-n-1}$. При этом, для фиксированного n и $m = n + r + 1$ получаем:

$$|\sin(2^n\pi t_0) - \sin(2^m\pi t_0)| = |\sin\frac{\pi}{2} - \sin 2\pi| = 1,$$

откуда заключаем, что ни последовательность $a_n \in A$, ни любая её подпоследовательность сходящимися не являются.

Для компактных множеств справедливы следующие утверждения.

1. *Если $A \subset X \subset M$, то A компактно в M тогда и только тогда, когда оно компактно в X.*
2. *Если A компактно, то A ограничено.*
3. *Если A компактно, то A замкнуто.*
4. *Любое замкнутое подмножество компактного множества – компактно.*

Для компактных множеств справедлив аналог теоремы о вложенных шарах. А именно, справедлива теорема Г. Кантора.

В метрическом пространстве последовательность вложенных непустых компактов имеет непустое пересечение.

Полнота пространства при этом не предполагается, равно как и не требуется чтобы диаметры множеств стягивались.

Наряду с множествами, понятие компактности можно определить и для всего метрического пространства.

Метрическое пространство называется *компактным*, если из любой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Компактное пространство сепарабельно.

Пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\tilde{L}^p_{[a;b]}$, l^2 некомпактны.

Примером компактного пространства может служить метрическое пространство, элементами которого являются точки отрезка $[a;b]$ с обычной метрикой $\mu(x,y) = |b-a|$. Или, более общо, если $X \subset M$ компакт в метрическом пространстве (M,μ), то пространство (X,μ) – компактно.

Исчерпывающее описание всех компактных пространств дает следующая теорема (например, [5]).

Теорема *Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно является непрерывным образом канторова совершенного множества.*

2.3. Линейные векторные пространства

Важную роль в анализе играют т.н. *линейные* пространства. Концепция линейности предполагает возможность производить над элементами пространства линейные операции – сложение и умножение на числа, действительные или комплексные. Если такая возможность предусмотрена, то говорят, что пространство наделено *линейной структурой.* Элементы линейного пространства называют точками или векторами.

Как и метрические, линейные пространства могут быть абстрактными и конкретными. Когда мы говорим об абстрактных пространствах, нас не интересует ни природа элементов этих пространств, ни конкретизация правил сложения элементов и умножения их на числа — важно только наличие этих процедур. Если же элементы некоторого множества конкретизированы и для этих элементов указаны конкретные правила сложения и умножения на числа, тогда это множество рассматривается как некоторая *реализация* абстрактного линейного пространства. Конкретные линейные пространства могут обладать некоторыми свойствами, присущими только данной реализации.

Основные определения

Пусть L – некоторое множество. Говорят, что L наделено *линейной структурой*, или является *линейным (векторным) пространством*, если

I. для любых двух элементов множества L определена операция $\boxplus$, называемая *сложением*[18]:

$$\forall\, a, b \in L \;\; a \boxplus b \in L.$$

Эта операция обладает всеми свойствами обычного сложения:

1. $a \boxplus b = b \boxplus a$ – коммутативностью;
2. $(a \boxplus b) \boxplus c = a \boxplus (b \boxplus c)$ – ассоциативностью;
3. в пространстве существует единственный, нейтральный относительно сложения элемент $\circledcirc$, называемый *нулевым* — $\forall a \in L : a \boxplus \circledcirc = a$;
4. у каждого элемента a пространства существует единственный *противоположный* $\boxminus a$, такой, что $a \boxplus (\boxminus a) = \circledcirc$.

[18]Слова "определена операция" означают, что результат этой операции является элементом того же множества

Тем самым в пространстве определена операция вычитания элементов — для любых двух элементов пространства a и b определен элемент $a \boxminus b = a \boxplus (\boxminus b)$.

II. для любого элемента множества L и любого числа λ определена операция $\boxtimes$, называемая *умножением на число*:

$$\forall\, a \in L \text{ и } \forall\, \lambda \in K:\ \lambda \boxtimes a = a \boxtimes \lambda \in L.$$

Здесь символом K обозначено одно из стандартных множеств — действительных ($\mathbb{R}$) или комплексных ($\mathbb{C}$) чисел.

Если допускается умножение на действительные числа, пространство называется действительным, если на комплексные — комплексным[19]. Для дальнейшего важно, что в квантовой механике используются комплексные линейные пространства.

Операция умножения на число обладает следующими свойствами: $\forall \alpha, \beta \in K, a, b \in L$:

1. $\alpha(\beta \boxtimes a) = (\alpha\beta) \boxtimes a$;
2. $(\alpha + \beta) \boxtimes a = \alpha \boxtimes a \boxplus \beta \boxtimes a$;
3. $\alpha \boxtimes (a \boxplus b) = \alpha \boxtimes a \boxplus \alpha \boxtimes b$;
4. $1 \boxtimes a = a$;
5. $0 \boxtimes a = \circledcirc$;
6. $\alpha \boxtimes \circledcirc = \circledcirc$.

В дальнейшем везде, где это не вызовет недоразумений, мы будем вместо значков $\boxplus, \boxminus, \boxtimes$ и $\circledcirc$ использовать обычные обозначения операций сложения, вычитания, умножения и стандартное обозначение для нулевого элемента, соответственно $+, -, \cdot, 0$.

Примеры.

I. Геометрические пространства. Пусть V_1, V_2, V_3 — множества всех геометрических векторов соответственно на прямой, на плоскости и в пространстве.

Определим сложение векторов обычным образом – правилом параллелограмма, умножение на действительное число — растяжением или сжатием вектора, с изменением его направления,

[19] Подчеркнем, что независимо от природы элементов, образующих пространство, действительность или комплексность пространства определяется природой скаляров, на которые разрешено умножение. Например, пространство, элементами которого являются *комплексные* числа будет *действительным* пространством, если допускается умножение только на действительные числа.

если число отрицательное. Легко проверить, что все требования, которые предъявляются к линейным операциям над элементами пространства здесь выполнены.

Роль нулевого элемента играет ноль-вектор, противоположного — вектор с противоположным направлением.

Пространства V_1, V_2, V_3 — действительные линейные пространства.

II. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, элементами которых являются упорядоченные столбцы действительных или комплексных чисел с линейными операциями, определенными покоординатно, являются линейными пространствами.

III. Пространство решений линейной однородной системы алгебраических уравнений.

Если $z = (z_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$, $A = ||a_{ij}||$ — комплексная матрица формата $m \times n$, то множество L решений системы m алгебраических уравнений с n неизвестными

$$Az = 0 \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \cdots + a_{1n}z_n & = 0 \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \cdots + a_{2n}z_n & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = 0 \\ a_{m1}z_1 + a_{m2}z_2 + \cdots + a_{mn}z_n & = 0 \end{array} \right.$$

образует линейное пространство.

IV. Пространство, элементами которого являются решения обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения порядка n:

$$L = \{x(t):\; p_n(t)x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)x' + p_0(t)x = 0\}.$$

V. Пусть L — совокупность вещественных (комплексных) матриц формата $m \times n$, λ — действительное (комплексное) число. Обычным образом (т.е. покомпонентно) определяя сложение матриц и умножение матрицы на число, получим линейное векторное пространство,

Нулевой элемент здесь – матрица $\circledcirc$, все элементы которой нули, противоположный – матрица $-A = \| - a_{ij}\|_{m\times n}$

VI. Рассмотренные выше (раздел 1.2.1) пространства $C_{[a;b]}$, $\tilde{L}^2_{[a;b]}$, $\tilde{L}_{[a;b]}$ обладают естественной линейной структурой, которая определяется обычными операциями сложения функций и умножения функций на число.

Пусть $M \subset L$ — некоторое подмножество элементов пространства L. Если оно *алгебраически замкнуто* относительно введенных в L линейных операций, (т.е. если сумма любых двух элементов из M и произведение любого элемента из M на число (а тем самым, нулевой и противоположный элементы) принадлежат M), то M называется *алгебраическим подпространством* или просто *подпространством* линейного пространства L. Любое линейное пространство обладает *нулевым подпространством*, которое состоит из одного нулевого элемента. Все пространство также является подпространством. Эти подпространства называются *несобственными.*

Если у пространства существует отличное от него подпространство, содержащее по крайней мере один ненулевой элемент, то такое подпространство называется *собственным.*

Примеры

I. Если L — комплексное линейное пространство, а $x_0 \neq 0$, то совокупность элементов $M = \{x \in L: \ x = \lambda x_0, \ \lambda \in \mathbb{C}\}$ образует подпространство пространства L. Оно называется *прямой линией* в L.

II. Если $a_1, a_2, \dots, a_r$ – произвольные элементы линейного пространства L, то совокупность элементов $M = \{x \in L: \ x = \sum\limits_1^r \lambda_i a_i, \ \lambda_i \in \mathbb{C}\}$ образует подпространство пространства L.

III. В пространстве $C_{[a;b]}$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ комплекснозначных функций, с обычным образом определенными операциями сложения и умножения на число $\lambda \in \mathbb{C}$, многочлены образуют собственное подпространство. Мы его обозначаем $\mathcal{P}$.

IV. В пространстве $\mathcal{P}$ многочленов на отрезке $[a;b]$ многочлены, степень которых не превосходит заданной, образуют собственное подпространство[20]. Мы его обозначаем $\mathcal{P}_n$.

В заключение отметим, что *пересечение* $L_1 \bigcap L_2$ *подпространств* $L_i \subset L, \ i = 1, 2$ *является подпространством пространства* L*,* а теоретико-множественная сумма — вообще говоря, нет. Однако, если $L_1 \subset L_2$ или $L_2 \subset L_1$, то в этом случае $L_1 \bigcup L_2$ — подпространство пространства L.

Линейная зависимость. Размерность

Если $a_1, a_2, \dots, a_k$ — некоторые элементы пространства L, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — некоторые[21] числа, то выражение

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$$

называется *линейной комбинацией* элементов $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Линейной оболочкой совокупности (может быть и бесконечной) векторов $\{a_\alpha, \ \alpha \in I\}$ называется множество всех конечных линейных комбинаций этих векторов:

$$L[a_\alpha] = \{x \in L: \quad x = \lambda_1 a_{\alpha_1} + \lambda_2 a_{\alpha_2} + \dots + \lambda_k a_{\alpha_k}, \ k \in \mathbb{N}, \ \lambda_i \in K\},$$

где K одно из допускаемых множеств констант – $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Если линейная оболочка образована векторами $a_s, \ s \in S$, то говорят, что она *натянута на эти векторы.*

Линейная оболочка — подпространство пространства L.

[20] Полезно отметить, что совокупность многочленов, степень которых *равна* n, подпространства не образуют.

[21] Допускаемые в качестве множителей в пространстве L, т.е. либо действительные, в случае действительного линейного пространства, либо комплексные, в случае комплексного

Элементы пространства $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называются *линейно зависимыми*, если по крайней мере один из них может быть представлен линейной комбинацией прочих. В противном случае эти элементы называются линейно независимыми.

Бесконечная система векторов линейного пространства называется *линейно независимой*, если любая её конечная подсистема линейно независима.

Легко понять, что всякая совокупность векторов, среди которых есть нулевой элемент, линейно зависима — достаточно представить нулевой элемент как линейную комбинацию с нулевыми коэффициентами при ненулевых элементах. Пара векторов a, b линейно зависима, если эти векторы пропорциональны: $a = \lambda b$.

Удобным критерием линейной независимости является следующее утверждение:

Совокупность элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейного пространства линейно независима тогда и только тогда, когда из равенства

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k = \circledcirc$$

следует, что все коэффициенты $\lambda_i = 0$, i=1,2,...,k.

Отсюда:

Совокупность элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейного пространства линейно зависима тогда и только тогда, когда существует нулевая линейная комбинация

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k = \circledcirc$$

где хотя бы один из коэффициентов $\lambda_i \neq 0$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ — целое положительное число. Если в пространстве L найдется n линейно независимых элементов, а любые $n + 1$ — линейно зависимы, то говорят, что пространство L имеет *размерность* n. Этот факт записывается так: $\dim L = n$.

Если же для любого n в пространстве найдется n линейно независимых элементов, то пространство называют *бесконечномерным*.

Размерность любого подпространства не превосходит размерности пространства. Размерность линейной оболочки не превосходит количества векторов, на которые натянута эта оболочка. Точнее, *размерность линейной оболочки равна количеству линейно независимых векторов, среди тех, на которые натянута оболочка.*

Если M — подпространство пространства L, h — некоторый вектор этого пространства, то совокупность векторов $\mathcal{M}_h = M + h = \{x \in L : \ x =$

$a + h,\ a \in M\}$ называется *алгебраическим многообразием* или линеалом. Очевидно, что если $h \in M$, то $\mathcal{M}_h = M$.

Базис в линейном пространстве

Пусть L — конечномерное линейное пространство, $\dim L = n$. Выберем какую-нибудь систему n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ этого пространства и присоединим к ним произвольный вектор $a \in L$.

Он может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $e_i, i = 1, 2, \ldots, n$:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n,$$

где a_i — некоторые числа.

◀ Действительно, поскольку система векторов $e_1, \ldots, e_n, a$ — линейно зависима, то существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \alpha$ такие, что

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \alpha a = 0. \qquad (*)$$

Постоянная $\alpha \neq 0$, в противном случае векторы e_i — линейно зависимы. Разделив обе части соотношения (*) на $\alpha \neq 0$ и обозначив $a_i = -\dfrac{\lambda_i}{\alpha}, i = 1, 2, \ldots, n$, убеждаемся в справедливости утверждения. ▶

Любой набор из n линейно независимых векторов называется *базисом* пространства L, а числа a_i — *координатами* вектора a в этом базисе.

В любом конечномерном пространстве есть по крайней мере один базис.

Справедливы следующие утверждения:

1. *В конечномерном линейном пространстве бесконечно много различных базисов. Все они состоят из одинакового (равного размерности пространства) числа векторов.*

2. *В фиксированном базисе координаты вектора определены единственным образом.*

   В разных базисах у одного и того же вектора будут разные координаты.

3. *У нулевого вектора все координаты нули.*

4. *У вектора $-a$, противоположного вектору a, координаты противоположны координатам вектора a.*

5. *Если базис в пространстве L фиксирован, то все линейные операции над векторами, заданными своими координатами в этом базисе, осуществляются покоординатно, т.е координаты вектора, являющегося суммой векторов, равны сумме соответствующих координат слагаемых, а координаты произведения вектора на число – произведению числа на координаты этого вектора.*

Изоморфизм

Как и в случае с метрическими пространствами, где понятие изометрии позволяет не различать тождественные с точки зрения структуры (в этом случае — метрической) пространства, понятие *изоморфизма* дает возможность не различать пространства, тождественные с точки зрения линейной структуры.

Точнее, если L_1 и L_2 — линейные пространства, между элементами которых установлено взаимнооднозначное соответствие

$$\forall x \in L_1 \ \exists! y \in L_2 : \ y = f(x), \ \forall y \in L_2 \ \exists x = f^{-1}(y),$$

при котором $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ и $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, то такие пространства называются *изоморфными*.

При изоморфизме нулевой элемент $\circledcirc_1$ пространства L_1 переходит в нулевой элемент $\circledcirc_2 \in L_2 : \ f(\circledcirc_1) = \circledcirc_2$, а противоположный – в противоположный: $f(-x) = -f(x) = -y$, линейно зависимые векторы – в линейно зависимые, а линейно независимые – в линейно независимые.

Всякие утверждения, связанные со свойствами операций сложения и умножения на число, идентичны в изоморфных пространствах.

Справедливо утверждение:

Конечномерные линейные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда у них одинаковая размерность.

Тем самым, для любого значения $n \in \mathbb{N}$ можно указать некоторое *каноническое* пространство, являющееся представителем *всех* линейных пространств в этой размерности. В качестве канонического может быть использовано любое пространство данной размерности. Чаще всего в качестве канонических используются т.н. "координатные" пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

Координатные пространства. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$, элементы которого всевозможные упорядоченные наборы столбцов n комплексных чисел, Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексное число Если u, v – пара таких столбцов, то положим

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}, \ u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \cdots + \cdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \ \lambda u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \cdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

Нулевым вектором здесь будет вектор $\circledcirc$, все компоненты которого нули, а вектором, противоположным к вектору $u = (u_i)_{i=1}^n$, вектор $-u = (-u_i)_{i=1}^n$.

Это – комплексное линейное векторное пространство. Его размерность – $\dim \mathbb{C}^n = n$.

Если L^n – произвольное комплексное линейное пространство размерности n, то, как было отмечено выше, всякий вектор этого пространства единственным образом представим своими координатами:

$$\forall u \in \mathbb{C}^n : \ u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \cdots + u_n e_n \Rightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Какова бы ни была природа пространства L^n, столбец координат — вектор из $\mathbb{C}^n$.

Очевидно, что любое пространство L^n изоморфно пространству $\mathbb{C}^n$. Достаточно каждому вектору $u \in L^n$ поставить в соответствие столбец его координат в некотором (фиксированном) базисе. Именно поэтому пространство $\mathbb{C}^n$ носит название *координатного.*

Аналогично обстоит дело и с действительным координатным пространством — $\mathbb{R}^n$, элементы которого упорядоченные наборы n действительных чисел и где допустимо умножение на действительные же числа. Всякое действительное n-мерное линейное векторное пространство L^n изоморфно $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что если на множестве комплексных чисел $\mathbb{C}^n$ допустить умножение только на действительные числа, то это множество будет *действительным* линейным пространством и его размерность в этом случае будет равна $2n$.

В случае бесконечномерных пространств ситуация несколько сложнее.

Базисом Гамеля называется множество Γ линейно независимых векторов пространства L таких, что любой вектор этого пространства представим в виде линейной комбинации *конечного* числа векторов из Γ:
$\forall \ a \in L \ \exists r \in \mathbb{N}$ и линейно независимые векторы $e_1, e_2, \ldots, e_r \in \Gamma$ такие, что

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_r e_r.$$

Известно, что *базис Гамеля существует в любом бесконечномерном пространстве.* Любые два базиса Гамеля в одном и том же бесконечномерном пространстве равномощны. Последнее обстоятельство дает основание для уточнения понятия размерности линейного пространства — размерностью[22] линейного пространства называется *мощность базиса Гамеля.*

Справедливо следующее утверждение:

[22]Эту размерность еще называют *алгебраической размерностью*

Линейные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их базисы Гамеля равномощны.

В конечномерных пространствах размерность, как максимально возможное количество линейно независимых векторов, и алгебраическая размерность, совпадают. Базис конечномерного линейного пространства является базисом Гамеля.

Примером базиса Гамеля в бесконечномерном пространстве может служить система степеней в пространстве многочленов $\mathcal{P}$.

Наличие базиса в конечномерном пространстве позволяет унифицировать линейные операции над векторами, сводя их к операциям над координатами, т.е. – над числами. В бесконечномерном случае ситуация формально такая же. Однако, у каждого вектора a свои наборы координатных систем $\{e_i\}_{i=1}^r$, такие, что $e_i = e_i(a),\ r = r(a)$, а это значительно усложняет координатную интерпретацию операций.

С этой точки зрения более естественным аналогом конечномерного базиса для бесконечномерного пространства служит *базис Шаудера.*[23]

Базисом Шаудера называется не более чем счетная система линейно независимых векторов $e_n, n = 1, 2, \ldots$, таких, что всякий вектор пространства L представим единственным образом в виде *не более чем счетной* линейной комбинации векторов $e_n, n = 1, 2, \ldots$:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n + \cdots\ . \tag{1.2.6}$$

Поскольку понятие счетной линейной комбинации требует уточнения[24], мы вернемся к нему несколько позднее.

Долгое время было неизвестно, в любом ли бесконечномерном сепарабельном[25] пространстве существует базис Шаудера. В 1972 году шведский математик Пер Энфло получил отрицательный ответ на этот вопрос. Он построил пример сепарабельного пространства, в котором базис Шаудера не существует.

Во всех, широко использующихся в приложениях пространствах, базис Шаудера есть, хотя не всегда это просто установить. Для дальнейшего важно, что в используемых в квантовой механике *сепарабельных гильбертовых* пространствах, базис Шаудера всегда существует.

[23] Иногда его называют базис Банаха-Шаудера.

[24] Фактически здесь речь идет о сходимости ряда (1.2.6), однако отсутствие метрической структуры не позволяет здесь обсуждать этот вопрос.

[25] Легко видеть, что если в банаховом пространстве есть базис Шаудера, то это пространство сепарабельно.

2.4. Линейные нормированные пространства

Для того, чтобы в линейных пространствах можно было развивать анализ (т.е. вводить понятия близости, сходимости, непрерывности, суммировать ряды и т.д.) необходимо наделить пространство метрической структурой. Удобнее всего это сделать с помощью естественного для линейных пространств понятия *нормы.*

Пусть L – линейное пространство.

Нормой элемента $x \in L$ называется действительное число, обозначаемое $\|x\|$, удовлетворяющее следующим требованиям:

1. $\forall x \in L: \ \|x\| \geq 0$, при этом $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \circledcirc$;
2. $\forall x \in L, \forall \lambda \in \mathbb{C}: \ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Линейное пространство, в котором введена норма, называется линейным *нормированным* пространством.

Легко убедиться в том, что соотношение

$$\mu(x; y) = \|x - y\|$$

определяет в пространстве L метрику – все требования, предъявляемые к метрике выполнены и, тем самым, линейное нормированное пространство *является метрическим пространством*, метрика в котором согласована с нормой.

Ясно, как определяются понятия шара, окрестности точки, а с ними и понятия предела, фундаментальной последовательности, полноты, плотности и т.д.

Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым.*

Всякое конечномерное линейное нормированное пространство – банахово.

Для бесконечномерных пространств это не так. Однако, неполное нормированное пространство всегда можно пополнить, что следует из теоремы о пополнении метрических пространств.

Важным для приложений классом банаховых пространств являются **пространства Лебега**, являющиеся пополнением рассмотренных выше неполных пространств $\tilde{L}^p_{[a;b]}$, $p \geq 1$ относительно введенной в них метрики.

Пусть $\tilde{L}^p_{[a;b]}$, $p \geq 1$ — совокупность непрерывных на отрезке $[a;b]$ комплекснозначных функций с естественно определенными операциями сложения и умножения на число и нормой. задаваемой соотношением

$$\|x\| = \sqrt[p]{\int\limits_a^b |x(t)|^p dt}, \; p \geq 1.$$

Легко проверить, что для так заданной нормы выполняются все требования, предъявляемые к норме. В проверке нуждается лишь неравенство треугольника, которое в данной ситуации является *неравенством Минковского для интегралов* и справедливость которого была установлена выше (см. раздел 1.2.1, пример VI).

$$\left(\int\limits_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так определенная норма согласуется с L^p-метрикой $\mu(x,y) = \|x-y\|$.

Нормированное пространство $\tilde{L}^p_{[a;b]}$ неполно, как уже было установлено выше. Его пополнение, существование и единственность которого (с точностью до изоморфизма) гарантирует теорема о пополнении – банахово пространство, которое обозначается $L^p_{[a;b]}$ и называется пространством Лебега. Следует отметить, что в отличие, например, от пространства $C_{[a;b]}$ или от пространств $\tilde{L}^p_{[a;b]}$, в которых элементами были функции, элементы пространств Лебега — *классы функций*. Представителями этих классов служат измеримые функции, интегрируемые с p-ой степенью и совпадающие почти во всех точках отрезка, за исключением множеств лебеговой меры нуль, Как и выше, плотность совокупности многочленов с рациональными коэффициентами обеспечивает сепарабельность пространств Лебега. Все пространства Лебега — бесконечномерны и обладают базисом Гамеля, мощность которого континуум.

Сходимость в этих пространствах называется *сходимостью в среднем со степенью p.* В случае $p = 2$ — просто *сходимостью в среднем.*

В конечномерных пространствах *алгебраические подпространства*, обязательно замкнуты метрически, т.е. относительно сходимости по норме.

В бесконечномерных пространствах это уже не обязательно так.

Например, совокупность $\mathcal{P}$ многочленов в пространстве $C_{[a;b]}$ непрерывных на отрезке функций замкнута относительно линейных операций, однако незамкнута относительно сходимости по норме. Уже упоминавшаяся выше (пример II раздела 1.1.2) последовательность многочленов $P_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ фундаментальна в $\mathcal{P}$ по норме $C_{[a;b]}$, однако в $\mathcal{P}$ предела не имеет.

В связи с этим принимается следующее определение: *подпространством линейного нормированного пространства называется его алгебраическое подпространство, замкнутое относительно предельного перехода.*

Линейные операции в L оказываются непрерывными относительно метрики, введенной соотношением $\mu(x;y) = \|x-y\|$. Т.е.

$$\text{если } x_n \to x, y_n \to y \;\Rightarrow\; (x_n + y_n) \to x + y$$

и

$$\text{если } \lambda_n \to \lambda, x_n \to x \;\Rightarrow\; \lambda_n x_n \to \lambda x.$$

Кроме того, в силу непрерывности метрики, непрерывной оказывается и норма:

$$\text{если } x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|.$$

Примеры.

I. В пространстве $C_{[a;b]}$ функций непрерывных на отрезке с чебышёвской метрикой $\mu(x,y) = \max|x(t) - y(t)|$, норма, согласованная с метрикой, определяется соотношением: $\|x\| = \max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|$. В силу линейной независимости системы степеней $1, t, t^2, \ldots, t^n \ldots$ это пространство бесконечномерно. $C_{[a;b]}$ — банахово пространство. Полнота, как уже было отмечено выше (раздел 1.2.2), является следствием непрерывности предела равномерно сходящейся на отрезке последовательности непрерывных функций. $C_{[a;b]}$ — сепарабельное пространство. Сепарабельность следует из теоремы Вейерштрасса, о равномерном приближении непрерывной функции многочленами с рациональными коэффициентами (раздел 1.2.1).

II. Элементами пространства $C^r_{[a;b]}$ являются функции определенные на отрезке $[a;b]$, непрерывные на этом отрезке и имеющие на нём r непрерывных производных. Линейные операции определяются естественным образом. Норма дается соотношением

$$\|x\| = \max\{\max_{a\le t\le b}|x(t)|, \max_{a\le t\le b}|x'(t)|, \ldots, \max_{a\le t\le b}|x^{(r)}(t)|\}.$$

Как и в предыдущем примере, легко устанавливается бесконечномерность, полнота и сепарабельность пространства $C^r_{[a;b]}$.

III. Наряду с пространствами $L^p_{[a;b]}$, рассмотренными выше, важным для квантовой механики примером банаховых пространств являются пространства, обозначаемые[26]обычно l^p.

Пусть $p \ge 1$. Элементами пространства l^p являются последовательности комплексных чисел $x = \{x_i\}_1^\infty$ такие, что ряд $\sum|x_i|^p$ сходится. Линейные операции над такими последовательностями определяются покомпонентно: $x + y = \{x_i + y_i\},\ \lambda x = \{\lambda x_i\}$. Заметим, что если ряд $\sum|x_i|^p$ сходится, то и ряд $\sum|\lambda x_i|^p$ также сходится и если каждый из рядов $\sum|x_i|^p,\ \sum|y_i|^p$ сходится, то в силу неравенства Минковского для рядов[27] сходится ряд $\sum|x_i + y_i|^p$. Поэтому линейные операции корректно определены для любых последовательностей, являющихся векторами пространства l^p.

Норма на множестве таких последовательностей вводится соотношением:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Аксиомы нормы 1-2 легко проверяются, а неравенство треугольника в рассматриваемой ситуации это уже упоминавшееся неравенство Минковского для рядов.

Каждое из пространств l^p бесконечномерно, сепарабельно и полно.

[26]Читается – *эль-пэ-маленькое* .

[27]

$$\left(\sum|x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

.

◀ Бесконечномерность l^p следует из линейной независимости бесконечной (счетной) системы элементов, у которых на i-том месте стоит 1, а на всех прочих – нули. Сепарабельность — из плотности множества векторов с рациональными компонентами.

Для доказательства полноты рассмотрим — фундаментальную в l^p последовательность x^n:

$$x^n = \{x_1^n, x_2^n, \cdots, x_i^n, \cdots\} = \{x_i^n\}_{i=1}^{\infty}, \; n = 1, 2, \ldots.$$

Возьмем координату с номером k и рассмотрим для произвольных целых m, n разность $|x_k^n - x_k^m|$. Поскольку $p \geq 1$, то справедливы неравенства:

$$|x_k^n - x_k^m| \leq |x_k^n - x_k^m|^p \leq \sum |x_k^n - x_k^m|^p = \|x^n - x^m\|^p.$$

Из фундаментальности последовательности x^n заключаем, что для достаточно больших m, n разность $\|x^n - x^m\|^p$ неограничено уменьшается, а, следовавтельно $\forall k : \; |x_k^n - x_k^m| \to 0$, если только $m, n \to \infty$. Последнее означает фундаментальность числовой последовательности $\{x_k^n, \; n = 1, 2, 3, \ldots\}$, а значит её сходимость.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^n = a_k, \; k = 1, 2, \ldots$. Покажем, что последовательность $\{a_k\}$ лежит в l^p, т.е. её компоненты удовлетворяют условию $\sum |a_k|^p < +\infty$. Рассмотрим

$$\sum_k |a_k|^p = \sum_k |a_k - x_k^n + x_k^n|^p.$$

Как уже было отмечено выше, для произвольного значения $\varepsilon > 0$, достаточно больших значений m, n и любого целого k справедливо неравенство $\sum |x_k^n - x_k^m|^p \leq \|x^n - x^m\|^p < \varepsilon^p$. Перейдем в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} \sum |x_k^n - x_k^m|^p = \sum |x_k^n - a_k|^p < \varepsilon^p.$$

Последнее означает сходимость ряда из p-ых степеней разности $|x_k^n - a_k|$. Следовательно, к рядам $\sum |x_k^n - x_k^m|$ и $\sum |x_k^n|$ применимо неравенство Минковского для рядов, и мы получаем:

$$\sum |a_k|^p = \sum |a_k - x_k^n + x_k^n|^p \leq \left(\left(\sum |a_k - x_k^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |x_k^n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p$$

откуда следует сходимость ряда $\sum |a_k|^p$, т.е. принадлежность последовательности $\{a_k^n\}$ пространству l^p. Сходимость последовательности $\{x_k^n\}$ к элементу $\{a_k\}$ очевидно следует из неравенства $\sum |x_k^n - a_k|^p < \varepsilon^p$. ▶

Ряды в банаховых пространствах. Базис Шаудера

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ последовательность элементов банахова пространства $\mathbb{B}$.

Рядом называется формальное выражение вида

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots = \sum_1^{\infty} x_n.$$

Частичной суммой ряда называется сумма $s_n = \sum\limits_1^n x_n$. Ряд называется *сходящимся*, если существует предел (в смысле сходимости по норме) последовательности частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S.$$

Элемент S в этом случае называется суммой ряда.

Как и в обычном анализе, полнота банахова пространства обеспечивает справедливость критерия Коши сходимости ряда:

ряд сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ \forall n, m > n_0\ \|x_m + x_{m+1} + \dots + x_n\| < \varepsilon,$$

а также обычные утверждения о сходимости рядов:

1. *Если ряд* $\sum x_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
2. *Если числовой ряд с положительными членами* $\sum a_n$ *сходится и* $\|x_n\| \le a_n$, *то и ряд* $\sum x_n$ *сходится.*
3. *Если сходится ряд* $\sum \|x_n\|$, *то и ряд* $\sum x_n$ *– тоже сходится*[28] .

Возвращаясь к определению базиса в бесконечномерных пространствах, заметим, что под базисом Шаудера следует понимать такую счетную последовательность элементов линейного пространства, которая обеспечивает единственность представления любого вектора этого пространства в виде сходящегося ряда:

$$\{e_n\}_1^\infty - \text{ базис Шаудера } \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{B}\ \exists!\ (\xi_n)_1^\infty :\ x = \sum_1^\infty \xi_n e_n.$$

2.5. Скалярное произведение. Гильбертовы пространства

Скалярное произведение.

Если $z = x + iy \in \mathbb{C}$ – комплексное число (либо $z(t) = x(t) + iy(t)$ комплекснозначная функция), то символом $\overline{z}$ будем в дальнейшем обозначать комплексно сопряженное к z выражение: $\overline{z} = x - iy$.

Операция комплексного сопряжения обладает следующими очевидными свойствами:

[28] Обратное, конечно, неверно

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
4. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$;
5. $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$.

Пусть L — комплексное линейное векторное пространство.

Если каждой паре векторов $x, y \in L$ поставлено в соответствие комплексное число, обозначаемое $\langle x|y\rangle$, удовлетворяющее требованиям:

1. $\forall x \in L: \ \langle x|x\rangle \geq 0, \ \langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x, y, z \in L, \alpha, \beta \in \mathbb{C}: \ \langle x|\alpha y + \beta z\rangle = \alpha \langle x|y\rangle + \beta \langle x|z\rangle$;
3. $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle}$.

то говорят,что в пространстве L задано *скалярное произведение.*

Заметим, что так определенное скалярное произведение полуоднородно:

$$\langle \alpha x|y\rangle = \overline{\alpha} \langle x|y\rangle, \qquad \langle x|\beta y\rangle = \beta \langle x|y\rangle.$$

Если пространство L — действительное, то требование 3 превращается в условие симметричности скалярного прозведения $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$.

Важным атрибутом скалярного произведения является *неравенство Коши-Буняковского-Шварца*:

$$\forall x, y \in L: \ |\langle x|y\rangle| \leq \sqrt{\langle x|x\rangle \cdot \langle y|y\rangle}. \tag{1.2.7}$$

◀ Пусть $x, y \in L, \lambda \in \mathbb{R}$ – произвольное действительное число. Если $\langle x|y\rangle = 0$, неравенство (1.2.7) очевидно выполняется. Для $\langle x|y\rangle \neq 0$ положим $\nu = \dfrac{\langle x|y\rangle}{|\langle x|y\rangle|}$,. Если $z = \lambda x + \nu y$. то

$$\langle z|z\rangle = \lambda^2 \langle x|x\rangle + 2\lambda |\langle x|y\rangle| + \langle y|y\rangle \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Квадратный трехчлен с действительными коэффициентами неотрицателен для произвольных действительных λ тогда и только тогда, когда его дискриминант неположителен:

$$D = |\langle x|y\rangle|^2 - \langle x|x\rangle \cdot \langle y|y\rangle \leq 0,$$

откуда и следует искомое. ▶

Полное линейное векторное пространство со скалярным произведением называется *унитарным* пространством[29].

[29]Обычно действительное конечномерное пространство со скалярным произведением называют евклидовым, Наименование *унитарное* сохраняется для конечномерных комплексных пространств В бесконечномерном случае *сепарабельное* полное пространство со скалярным произведением обычно называют гильбертовым, уточняя — действительное или комплексное.

Норма

Наличие скалярного произведения обеспечивает нормируемость унитарного пространства (а, следовательно, и метризуемость).

Пусть L — линейное векторное пространство со скалярным произведением.

Нормой[30] *элемента пространства* L назовем число, задаваемое соотношением: $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$.

Все требования предъявляемые к норме очевидно выполняются, в частности, неравенство треугольника следует из неравенства Коши-Буняковского, которое для норм записывется в виде

$$|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Важным обстоятельством является *непрерывность* скалярного прозведения относительно порожденной им нормы: если $x_n \to x, y_n \to y$ то $\langle x_n|y_n \rangle \to \langle x|y \rangle$.

Ортогональность

Наличие в линейном пространстве скалярного умножения дает возможность определить понятие *ортогональности* векторов этого пространства.

Ортогональными называются такие векторы $x, y \in L$, *скалярное произведение которых равно нулю*:

$$x \perp y \;\Leftrightarrow\; \langle x|y \rangle = 0.$$

Очевидно, что *только нулевой вектор ортогонален любому вектору пространства.* Точнее:

$$\langle x|u \rangle = 0 \;\forall x \in L \;\Leftrightarrow\; u = 0.$$

◀ В одну сторону это очевидно $u = 0 \Rightarrow \langle x|u \rangle = 0$. Пусть теперь $\langle x|u \rangle = 0 \;\forall x \in L$. Если допустить, что $u \neq 0$, то взяв $x = u$, получим $\langle u|u \rangle = \|u\|^2 = 0$, что возможно лишь при $u = 0$.▶

Если $M \subset L$ – собственное подпространство полного пространства L, то *совокупность элементов, ортогональных к* M, *образует в* L *подпространство. Мы его будем обозначать* $M^{\perp} = \{x \in L : \;\forall u \in M : \; x \perp u\}$.

◀ Действительно, легко убедиться в том, что вместе с векторами x, y, ортогональными M, этим же свойством обладает и любая линейная их комбинация. Метрическая же замкнутость совокупности векторов, ортогональных M, следует из непрерывности скалярного произведения.▶

[30] Иначе – нормой, согласованной со скалярным произведением

Заметим, что $M \cap M^{\perp} = \{\odot\}$. Наличие в линейном пространстве скалярного умножения позволяет взглянуть на понятие линейной зависимости и/или независимости векторов с новой точки зрения.

Если ненулевые векторы $u_1, u_2, \ldots, u_k$ – попарно ортогональны, то они линейно независимы

◀ Предполагая противное, заключаем, что один из векторов этой системы представим в виде линейной комбинации прочих. Пусть это, например, вектор u_k: $u_k = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_{k-1} u_{k-1}$. Умножая скалярно обе части этого разложения на вектор u_k, приходим к равенству $\|u_k\|^2 = 0$, которое противоречит тому, что вектор u_k – ненулевой.▶

Совокупность M векторов пространства L называется *ортонормированной*, если любые два вектора этой системы ортогональны друг к другу и все вектора системы нормированы:

$$\forall\, x, y \in M: \quad x \perp y, \quad \|x\| = \|y\| = 1.$$

Наличие в пространстве со скалярным произведением ортонормированных систем создает определенные удобства при реализации линейных операций над векторами и при вычислении скалярного произведения.

2.6. Конечномерные пространства со скалярным произведением

Как уже отмечалось выше, конечномерные[31] линейные векторные пространства со скалярным произведением всегда полны. Кроме того, в конечномерных пространствах не бывает незамкнутых подпространств.

Отметим еще несколько важных их свойств

В конечномерном унитарном пространстве любая ортонормированная система векторов конечна и количество входящих в неё векторов не превосходит размерности пространства.

◀ Действительно, пусть $\dim L = n$. Возьмем $k,\ 1 \le k \le n$ линейно независимых векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и положим $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$.

Пусть далее, λ_2^1 – число, такое, что вектор $\lambda_2^1 e_1 + x_2$ ортогонален вектору e_1. В силу линейной независимости векторов e_1 и x_2 при любом λ_2^1 вектор $\lambda_2^1 e_1 + x_2 \neq 0$. Число λ_2^1, обеспечивающее ортогональность, определяется единственным образом:

$$\langle e_1 | \lambda_2^1 e_1 + x_2 \rangle = \lambda_2^1 \langle e_1 | e_1 \rangle + \langle e_1 | x_2 \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_2^1 = -\frac{\langle e_1 | x_2 \rangle}{\langle e_1 | e_1 \rangle} = -\langle e_1 | x_2 \rangle.$$

Положим $e_2 = \dfrac{\lambda_2^1 e_1 + x_2}{\|\lambda_2^1 e_1 + x_2\|}$.

[31]Унитарные пространства конечной размерности возникают обычно, как пространства внутренних степеней свободы квантовомеханической системы, когда ее движение как целого в рамках поставленной задачи не представляет интереса. Таковым является, например, пространство спиновых состояний частиц со спином $\frac{1}{2}$ (электронов, протонов и пр.), имеющее размерность 2.

Аналогично вышеизложенному, найдем числа λ_3^1, λ_3^2 такие[32], что вектор $\lambda_3^1 e_1 + \lambda_3^2 e_2 + x_3$ будет ортогонален векторам e_1, e_2 и положим $e_3 = \dfrac{\lambda_3^1 e_1 + \lambda_3^2 e_2 + x_3}{\|\lambda_3^1 e_1 + \lambda_3^2 e_2 + x_3\|}$. Для построения вектора e_r, $2 \le r \le k$, построим числа $\lambda_r^i = -\langle e_i|x_r\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$, обеспечивающие ортогональность вектора $\sum \lambda_r^i e_i + x_r$ векторам $e_i, i = 1, 2, \ldots, r-1$ и, нормировав этот вектор, получим e_r.

Легко видеть, что так построенная система векторов — ортонормирована и конечна. ▶

Среди всех базисов в конечномерном унитарном пространстве, ортонормированные наиболее удобны, т.к. позволяют достаточно просто описывать координатные свойства векторов и реализовывать операции над векторами (в том числе и скалярное умножение) в координатной форме.

Координаты вектора в ортонормированном базисе

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис, то всякий вектор x может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,$$

где коэффициенты x_i – координаты x в базисе e_i. Умножая базисные векторы e_i на вектор x и учитывая ортонормированность базиса (т.е. $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$), получаем простой способ нахождения координат вектора в заданном базисе:

$$\langle e_i|x\rangle = x_1\langle e_i|e_1\rangle + x_2\langle e_i|e_2\rangle + \cdots + x_n\langle e_i|e_n\rangle = x_i\langle e_i|e_i\rangle = x_i.$$

Операции сложения векторов и умножения вектора на число теперь можно производить покоординатно.

Скалярное умножение в ортонормированном базисе

Для получения правила скалярного умножения векторов, заданных своими координатами, воспользуемся однородностью и аддитивностью скалярного умножения.

Пусть $x = \sum x_i e_i, y = \sum y_i e_i$. Рассмотрим:

$$\langle x|y\rangle = \langle \sum_i x_i e_i | \sum_j y_j e_j\rangle = \sum_i \sum_j \overline{x}_i y_j \langle e_i|e_j\rangle.$$

Поскольку базис e_i – ортонормирован, постольку

$$\langle e_i|e_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i =\neq j \end{cases},$$

[32] Легко находится, что $\lambda_3^1 = -\langle e_1|x_3\rangle, \lambda_3^2 = -\langle e_2|x_3\rangle$.

и в двойной сумме в предыдущем соотношении остаются только те слагаемые, для которых $i = j$:

$$\sum_i \sum_j \overline{x}_i y_j \langle e_i | e_j \rangle = \overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \cdots + \overline{x}_n y_n,$$

откуда получаем искомое правило скалярного умножения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе:

$$\langle x | y \rangle = \overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \cdots + \overline{x}_n y_n.$$

Легко проверяется, что в унитарных пространствах справедлив конечномерный аналог теоремы Пифагора:

$$\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

2.7. Бесконечномерные пространства со скалярным произведением

Пусть теперь L – гильбертово пространство, т.е. бесконечномерное полное сепарабельное пространство со
скалярным произведением. Мы в дальнейшем будем обозначать гильбертово пространство символом $\mathbb{H}$.

Легко убедиться в том, что *в любом гильбертовом пространстве существует счетная ортонормированная система векторов.*

◀Действительно, пусть $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}$: $\overline{G} = \mathbb{H}$ – счетное всюду плотное в $\mathbb{H}$ множество.

Если g_1 — первый в списке элементов множества G, то положим $e_1 = \dfrac{g_1}{\|g_1\|}$ и обозначим через L_1 подпространство, натянутое на вектор e_1 : $L_1 = \{x \in L : x = \lambda e_1\}$. Выберем из G элемент с наименьшим номером, не лежащий в L_1, (обозначим его g_2): $g_2 \notin L_1$, и пусть $\hat{g}_2 = \mathcal{P}_{L_1^\perp}(g_2)$ — проекция вектора g_2 на подпространство $L_1^\perp$. Положим $e_2 = \dfrac{\hat{g}_2}{\|\hat{g}_2\|}$. Если L_2 – подпространство, натянутое на векторы e_1, e_2, то выберем из G элемент с наименьшим номером (обозначим его g_3), не лежащий в L_2 и обозначим $\hat{g}_3 = \mathcal{P}_{L_2^\perp}(g_3)$, Положим $e_3 = \dfrac{\hat{g}_3}{\|\hat{g}_3\|}$ и т.д.

Построенная таким образом система векторов счетна[33] и ортонормирована.▶

Рассмотрим совокупность E произвольных *конечных* линейных комбинаций векторов e_i:

$$E = \{x \in \mathbb{H} : \ x = \sum_1^n \lambda_i e_i, \ \lambda_i \in \mathbb{C}\}.$$

Поскольку всякий вектор $g \in G$ лежит в одном из подпространств $L_n = L[e_1, e_2, \ldots, e_n]$, постольку E всюду плотно в $\mathbb{H}$ – $\overline{E} = \overline{G} = \mathbb{H}$,

[33] В противном случае $\mathbb{H}$ – конечномерно.

Систему векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ называют *полной в* $\mathbb{H}$, если не существует ненулевого элемента из $\mathbb{H}$, ортогонального всем векторам этой системы.

Построенная выше ортонормированная система — полна в $\mathbb{H}$.

◀Действительно, пусть в $\mathbb{H}$ найдется ненулевой вектор h, ортогональный всем векторам $e_i, i = 1, 2, \ldots$, а, следовательно, и всем векторам из E. Без ограничения общности можно считать, что $\|h\| = 1$. В силу плотности E в $\mathbb{H}$, для произвольного положительного ε найдется элемент $u \in E: \ \|h - u\| < \varepsilon$. Но тогда

$$\|h - u\|^2 = \langle h - u | h - u \rangle = \|h\|^2 + \|u\|^2 - \langle h | u \rangle - \langle u | h \rangle = 1 + \|u\|^2 < \varepsilon^2,$$

В силу произвольности ε и неотрицательности $\|u\|^2$ это невозможно. ▶

Ортонормированный базис в гильбертовом пространстве

Важным свойством полной системы является *возможность однозначного представления любого вектора x гильбертова пространства сходящимся рядом*:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n + \cdots, \ x_i \in \mathbb{C}. \tag{1.2.8}$$

◀Заметим, что если разложение (1.2.8) справедливо, то его коэффициенты x_i могут быть найдены по формулам $x_i = \langle e_i | x \rangle$.

Далее, пусть S_n^x – конечная сумма ряда (1.2.8):

$$S_n^x = \sum_1^n x_i e_i.$$

Легко видеть, что

$$\|x - S_n^x\|^2 \geq 0 \Rightarrow \langle x - S_n^x | x - S_n^x \rangle = \|x\|^2 - \sum_1^n |x_i|^2 \geq 0.$$

Рассмотрим числовой ряд $\sum |x_i|^2$. Из последнего неравенства следует. что его частичные суммы S_n ограничены сверху: $S_n \leq \|x\|^2$. В то же время, это ряд с неотрицательными членами, а потому его частичные суммы монотонно неубывают. В силу теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности, он сходится. А значит справедлив критерий Коши $|S_{n+m} - S_n| \to 0, \ n, m \to \infty$.

Поскольку гильбертово пространство полно, то и в нем для рядов из элементов пространства справедлив критерий Коши — ряд (1.2.8) сходится тогда и только тогда, когда для частичных сумм ряда выполняется $\|S_{n+m}^x - S_n^x\| \to 0, \ n, m \to \infty$. Имеем:

$$\|S_{n+m}^x - S_n^x\| = \| \sum_n^{n+m} x_i e_i \| = \sum_n^{n+m} |x_i|^2 = |S_{n+m} - S_n| \to 0,$$

откуда и следует сходимость ряда (1.2.8) к породившему его элементу для любого элемента пространства $\mathbb{H}$. ▶

Числа $x_i = \langle e_i | x \rangle$ называются *коэффициентами Фурье* вектора $x \in \mathbb{H}$ относительно ортонормированной системы $\{e_i\}$, а ряд (1.2.8) — рядом Фурье.

Тем самым полная ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве образует *базис Шаудера* этого пространства.

Как и в случае конечномерных пространств, наличие базиса в гильбертовом пространстве позволяет каждому вектору приписать упорядоченный набор его координат (коэффициентов Фурье). Это дает возможность достаточно просто описывать координатные свойства векторов и реализовывать операции над векторами (в том числе и скалярное умножение) в координатной форме.

Очевидно, что линейные операции над векторами в гильбертовом пространстве осуществляются покоординатно.

Что касается скалярного умножения, то простые выкладки, как и в конечномерном случае, приводят к формуле

$$\langle x|y \rangle = \overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \cdots + \overline{x}_n y_n + \cdots . \tag{1.2.9}$$

Отметим, что в силу неравенства Коши-Буняковского, ряд в (1.2.9) сходится для любых двух векторов из $\mathbb{H}$.

Из (1.2.9) немедленно следует аналог теоремы Пифагора, который в этом случае называется *равенством Парсеваля – Стеклова*:

$$\|x\|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 + \cdots .$$

Заметим, что помимо *полных* ортонормированных систем, в гильбертовом пространстве существуют и неполные[34]. Пусть $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n, \ldots$ – одна из таких систем, x – произвольный элемент пространства. Подсчитаем коэффициенты Фурье этого элемента относительно системы $\{e'_i\}$ – $x_i = \langle e'_i | x \rangle$ и составим ряд Фурье:

$$x_1 e'_1 + x_2 e'_2 + \cdots + x_n e'_n + \cdots .$$

Выкладки, аналогичные вышеприведенным, показывают, что этот ряд всегда сходится, однако уже не к породившему его элементу, а к *проекции* этого элемента на подпространство, натянутое на векторы $\{e'_i\}$. Равенство Парсеваля – Стеклова при этом переходит в неравенство

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 + \cdots \leq \|x\|^2,$$

которое носит название *неравенства Бесселя.*

Можно доказать, что в неравенстве Бесселя знак равенства достигается тогда и только тогда, когда x — элемент подпространства, натянутого на векторы e'_i.

[34] Примерами могут служить любая конечная или собственная (т.е. не совпадающая со всей системой) счетная подсистема полной системы.

В заключение отметим, что, как и в конечномерном случае, когда любые два пространства одинаковой размерности оказываются изоморфными и изометричными, в случае гильбертовых пространств справедливо утверждение:

Любые два гильбертовых пространства[35] *изоморфны и изометричны.*

◄ Пусть $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ — два гильбертовых пространства с базисами $\{e_i\}$ и $\{e_i'\}$, соответственно. Каждому вектору x из $\mathbb{H}_1$ поставим в соответствие вектор x' из $\mathbb{H}_2$ с теми же координатами. Очевидно, что это соответствие — изоморфизм линейных пространств. Изометричность такого соответствия следует из тождественности скалярных произведений (1.2.9) в рассматриваемых пространствах.►

Таким образом, все гильбертовы пространства могут быть представлены каким-нибудь конкретным[36] пространством. Чаще всего в приложениях в роли таких представителей выступают пространства L^2 и l^2.

Гильбертово пространство l^2. Напомним, что символом l^2 (l^p, $p = 2$) мы обозначили (пример 3, раздел 1.2.4) совокупность счетных упорядоченных наборов чисел $x = \{x_k\}_1^\infty$, таких, что ряд

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_k|^2 + \cdots \tag{1.2.10}$$

сходится.

Относительно покомпонентных операций сложения и умножения на число такие последовательности образуют линейное пространство. Заметим, что пространство l^2 — нормировано. Норма в этом пространствае дается соотношением:

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Введем скалярное произведение элементов l^2 соотношением (знаком $\overline{z}$, как и выше, обозначается число, комплексно-сопряженное к числу z):

$$\langle x|\ y\rangle = \overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \cdots + \overline{x}_k y_k + \cdots . \tag{1.2.11}$$

Легко проверяется корректность этого определения – сходимость ряда (1.2.11) обеспечивается цепочкой очевидных неравенств:

$$\left|\sum \overline{x}_i y_i\right| \le \sum |\overline{x}_i||y_i| = \sum |x_i||y_i| \le \sum \frac{1}{2}(|x_i|^2 + |y_i|^2.$$

[35] Одновременно действительные или комплексные.

[36] Действительные – действительным, комплексные – комплексным.

1. Скалярное умножение (1.2.11) определено для любых двух векторов, координаты которых удовлетворяют условию (1.2.10).
2. $\langle x|x\rangle = \sum |x_i|^2 \geq 0$. Если $\langle x|x\rangle = 0$, то $\forall i:\ x_i = 0$.
3. Очевидно, что $\langle z|\alpha x + \beta y\rangle = \alpha \langle z|x\rangle + \beta \langle z|y\rangle$.
4. $\langle x|y\rangle = \sum \overline{x}_k y_k,\ \langle y|x\rangle = \sum \overline{y}_k x_k \Rightarrow \overline{\langle y|x\rangle} = \sum \overline{x}_k y_k = \langle x|y\rangle$

Неравенство Коши-Буняковского в этом случае принимает вид:

$$|\sum x_k \overline{y}_k| \leq \sqrt{\sum |x_k|^2 \sum |y_k|^2}.$$

Норма (и метрика), порождаемые введенным нами скалярным произведением, даются соотношениями

$$\|x\|_{sp} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 + \cdots}, \quad \mu_{sp}(x;y) = \|x-y\|_{sp}$$

и, очевидно, совпадают с уже имеющимися в пространстве l^2 нормой (и метрикой): $\|x\| = \|x\|_{sp}$. Т.е., норма, имеющаяся в пространстве l^2 согласуется с нормой, порожденной введенным нами скалярным произведением.

Пространство l^2 с так определенным скалярным произведением является гильбертовым пространством.

Примером полной ортонормированной системы в l^2 может служить совокупность векторов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \end{pmatrix}, \quad \ldots .$$

Пространство l^2 канонически изоморфно и изометрично любому гильбертову пространству $\mathbb{H}$: действительное – действительному, комплексное – комплексному. Достаточно установить изоморфизм между элементами l^2 и элементами гильбертова пространства $\mathbb{H}$, поставив в соответствие каждому элементу пространства $\mathbb{H}$ набор его координат (т.е., элемент l^2).

Представляет интерес вопрос о том, когда в линейном нормированном пространстве можно ввести скалярное произведение, так, чтобы норма в этом пространстве была согласована с этим скалярным произведением, а когда — нет. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема[37],

[37] Доказательство можно найти в [3].

Теорема. (Тождество параллелограмма) *Для того, чтобы в линейном нормированном пространстве L можно было ввести скалярное произведение, так, чтобы норма с ним согласовывалась, необходимо и достаточно, чтобы имело место тождество*

$$\forall x, y \in L \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

При этом, скалярное произведение дается соотношением:

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Например, в пространствах l^p, $p \neq 2$, $p \geq 1$, ввести скалярное произведение таким образом нельзя. ◀ Действительно, рассмотрим пару векторов x, y, таких, что у вектора x первые две компоненты 1, остальные нули, а у вектора y первая компонента 1, вторая — -1, остальные нули. Получаем: $\|x\|_{l^p} = \|y\|_{l^p} = 2^{\frac{1}{p}}$, $\|x+y\|_{l^p} = \|x-y\|_{l^p} = 2$ и убеждаемся, что тождество параллелограмма не выполняется.▶

Аналогичные рассмотрения в случае пространства $C_{[a;b]}$ показывают, что и на этом пространстве норму невозможно задать с помощью какого-нибудь скалярного произведения. Достаточно проверить тождество параллелограмма для функций $x = 1$ и $y = \dfrac{t-a}{b-a}$.

Также и в пространствах L^p, $p \neq 2$, $p \geq 1$ ввести согласующееся с имеющейся нормой скалярное произведение нельзя. А вот в случае $p = 2$ — можно. Этот случай будет рассмотрен ниже.

Гильбертовы пространства $L^2_{[a;b]}$. Напомним, что символом $L^2_{[a;b]}$ мы условились обозначать *пополнение* пространства непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций[38] с обычным образом определенными операциями сложения и умножения на число, относительно нормы, задаваемой соотношением

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2.12}$$

Зададим скалярное умножение в $L^2_{[a;b]}$ соотношением

$$\langle x|y\rangle = \int_a^b \overline{x}(t)y(t)dt.$$

Норма, согласованнаю с этим скалярным произведением, дается соотношением

$$\|x\|_{sp} = \sqrt{\langle x|x\rangle} = \left(\int_a^b |x(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

[38] Действительных или комплекснозначных.

и очевидно совпадает с нормой (1.2.12), уже имеющейся в этом пространстве.

Отметим, что $L^2_{[a;b]}$ — бесконечномерное (счетная система степеней линейно независима), полное (по определению пополнения), сепарабельное (совокупность $\mathcal{P}_Q$ многочленов с рациональными коэффициентами плотна в $L^2_{[a;b]}$) пространство со скалярным произведением, т.е. — гильбертово пространство.

Еще раз подчеркнем отличие пространства $L^2_{[a;b]}$ от пространства $\tilde{L}^2_{[a;b]}$. Элементы последнего — обычные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a;b]$. Элементы же его пополнения по норме (8) — *классы эквивалентных функций.* Представителями одного и того же класса являются измеримые функции, квадрат которых интегрируем на $[a;b]$ и которые неразличимы по норме (1.2.12): две функции x, y относятся к одному и тому же классу тогда и только тогда, когда $\|x-y\| = 0$. При этом каждый из элементов пополнения с любой степенью точности (в смысле близости, определяемой нормой этого пространства) может быть представлен обычной непрерывной на $[a;b]$ функцией.

Сходимость в этом пространстве называется *сходимостью в среднем* и обычно обозначается так:

$$x_n \to x \;\Leftrightarrow\; \text{l.i.m.} x_n = x.$$

Примеры

I. Пусть $a = -\pi, b = \pi$. В действительном пространстве $L^2_{[-\pi;\pi]}$ примером полной ортонормированной системы (базиса) может служить система тригонометрических функций:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\ \dots .$$

Ряд Фурье в этом случае – обычный тригонометрический ряд Фурье[39].

II. В комплексном гильбертовом пространстве $L^2_{[-\pi;\pi]}$ примером полной ортонормированной системы может служить система комплекснозначных экспонент:

$$1,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{it},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-it},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2it},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2it},\ \dots,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int},\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-int},\dots .$$

III. Рассмотрим в действительном гильбертовом пространстве $L^2_{[-1;1]}$ систему степеней:

$$\varphi_1 = 1,\quad \varphi_2 = t,\quad \varphi_3 = t^2,\dots,\quad \varphi_n = t^{n-1},\dots .$$

Легко убедиться в линейной независимости векторов этой системы.

◀ Если какая-либо конечная подсистема степеней линейно зависима, то должно выполняться тождественно $\forall t \in [-1;1]:\ \lambda_1 t^{n_1} + \lambda_2 t^{n_2} + \ldots + \lambda_k t^{n_k} \equiv 0$, что возможно лишь при $\lambda_i = 0\ \forall i$. ▶

[39] Всегда, как было установлено выше, сходящийся *в среднем*, но, может быть и не сходящийся в обычном смысле (поточечно)!

Применим к этой системе процедуру ортогонализации. Пусть

$$e_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Полагая

$$e_2 = \frac{\varphi_2 + \lambda e_1}{\|\varphi_2 + \lambda e_1\|},$$

найдем λ из условия

$$\lambda = -\langle \varphi_2 | e_1 \rangle = \int\limits_{-1}^{1} t \frac{1}{2} dt = 0.$$

Поскольку $\|\varphi_2\| = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \dfrac{2}{3}$, заключаем, что $e_2 = t\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Аналогично, полагая

$$e_3 = \frac{\varphi_3 + \lambda_1^3 e_1 + \lambda_2^3 e_2}{\|\varphi_3 + \lambda_1^3 e_1 + \lambda_2^3 e_2\|},\ \ldots,\ e_k = \frac{\varphi_k + \lambda_1^k e_1 + \lambda_2^k e_2 + \cdots + \lambda_{k-1}^k e_{k-1}}{\|\varphi_k + \lambda_1^k e_1 + \lambda_2^k e_2 + \cdots + \lambda_{k-1}^k e_{k-1}\|},\ \ldots$$

и подбирая последовательно константы λ_i^k из условий

$$\lambda_i^k = -\langle \varphi_k | e_i \rangle = \int\limits_{-1}^{1} t^k e_i(t) dt,\ i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

приходим к системе попарно ортогональных и нормированных многочленов, которые образуют базис в $L^2_{[-1;1]}$

$$e_1 = \frac{1}{2},\ e_2 = t\sqrt{\frac{3}{2}},\ e_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(3t^2 - 1\right),\ e_4 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(5t^3 - 2t\right),\ \ldots,$$

Эти многочлены (с точностью до постоянных множителей), совпадают с хорошо известными в литературе и приложениях *многочленами Лежандра* (например, [2]), задаваемыми соотношениями:

$$P_1(t) = 1,\ P_2(t) = t,\ P_3(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \ldots,\ P_{n+1}(t) = \frac{1}{2^n (n-1)!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

Если $x(t)$ — произвольный элемент из $L^2_{[-1;1]}$, то он единственным образом может быть представлен сходящимся в среднем рядом по многочленам $e_i(t),\ i = 1, 2, \ldots$, коэффициенты которого даются соотношениями:

$$x_i = \langle x | e_i \rangle = \int\limits_{-1}^{1} x(t) e_i(t) dt \ \Rightarrow\ x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i.$$

Гильбертовы пространства $L^{2,\rho}_{[a;b]}$. Пусть $\rho(t) > 0$ – положительная вещественная функция, определенная на промежутке $[a; b]$. Рассмотрим совокупность непрерывных на этом промежутке функций, с обычным образом определенными линейными операциями – сложением и умножением на число.

Легко проверить, что соотношение

$$\langle x|y\rangle = \int\limits_a^b \rho(t)\overline{x}(t)y(t)dt \tag{1.2.13}$$

задает скалярное произведение на этой совокупности. Следовательно, обычным образом можно ввести на этом множестве функций норму и согласованную с нормой метрику:

$$\|x\| = \left(\int\limits_a^b \rho(t)|x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},\ \mu(x,y) = \|x-y\| = \left(\int\limits_a^b \rho(t)|x(t)-y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если теперь пополнить полученное линейное пространство по норме, согласованной со скалярным произведением (1.2.13), то мы получим *гильбертово пространство с весом* $\rho(t)$. которое обычно обозначают $L^{2,\rho}_{[a;b]}$.

Примеры

I. В пространстве $L^{2,\rho}_{[-1;1]}$ положим

$$\rho(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta},\ \alpha > -1,\ \beta > -1.$$

Условия, наложенные на постоянные α и β обеспечивают сходимость интеграла (1.2.13) для любых двух элементов из $L^{2,\rho}_{[-1;1]}$.

Ортогонализация системы степеней приводит к системе многочленов $e_i(t),\ i = 1, 2, \ldots$, которые только числовым множителем отличаются от многочленов Якоби:

$$J_1(t) = 1,\ J_{n+1}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\frac{d^n}{dt^n}(1-t)^{\alpha+n}(1+t)^{\beta+n}.$$

В частности,

1.1. при $\alpha = \beta = 0$ получаем рассмотренные выше многочлены Лежандра;

1.2. при $\alpha = \beta = -\dfrac{1}{2}$ получаем многочлены Чебышёва первого рода, ортогональные с весом $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$;

1.3. при $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ получаем многочлены Чебышёва второго рода, ортогональные с весом $\sqrt{1-t^2}$.

II. Пусть $a = 0,\ b = +\infty,\ \rho = e^{-t}$. Элемент x принадлежит пространству $L^{2,\rho}_{[0;\infty]}$, если сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-t}|x(t)|^2 dt < +\infty.$$

Очевидно, что система степеней t^n принадлежит этому пространству.

Её ортогонализация приводит к системе многочленов, которые называются многочленами Чебышёва-Лагерра и задаются соотношениями:

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t}\right).$$

Несколько первых многочленов этой системы приведены ниже:

$$L_0 = 1,\ L_1 = 1 - t,\ L_2 = 1 - 2t - \frac{1}{2}t^2,\ L_3 = 1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3.$$

III. Если $a = -\infty,\ b = +\infty,\ \rho = e^{-t^2}$, то ортогонализация системы степеней в пространстве $L^{2,\rho}_{[-\infty;+\infty]}$ приводит к многочленам $H_n(t)$, которые в литературе называются многочленами Чебышёва-Эрмита. Они ортонормированы с весом $\rho = e^{-t^2}$, т.е.

$$\forall m, n: \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_m(t) dt = \delta_{n,m}$$

и могут быть найдены из соотношения:

$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^n n!}} e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2}\right).$$

В квантовой механике многочлены Чебышёва-Эрмита играют важную роль, т.к. описывают возможные состояния квантового гармонического осциллятора (являются собственными функциями оператора Гамильтона, записанного в безразмерных переменных.)

Кроме того, в лазерной физике, а точнее - в теории открытых (оптических) резонаторов, многочлены Чебышёва-Эрмита описывают распределение амплитуды в поперечном сечении соответствующей поперечной моды Эрмита-Гаусса (собственно, произведение одного из многочленов Эрмита и функции Гаусса), характерной для оптических резонаторов с прямоугольной формой зеркал резонатора.

Гильбертовы пространства L^2_Ω. Естественным обобщением пространств функций одной переменной с интегрируемым квадратом на промежутке являются аналогичные пространства функций нескольких переменных, определенных на некотором множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть функция $x(t) = x(t_1, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и пусть она удовлетворяет условию "интегрируемости с квадратом" :

$$\int\limits_{\Omega} |x(t)|^2 dt = \iint \ldots \int |x(t_1, \ldots, t_n)|^2 dt_1 \cdots dt_n < +\infty. \qquad (1.2.14)$$

Если обычным образом пополнить это пространство по норме

$$\|x(t)\| = \sqrt{\iint \ldots \int |x(t_1, \ldots, t_n)|^2 dt_1 \cdots dt_n},$$

порожденной скалярным произведением:

$$\langle x|y\rangle = \iint \ldots \int \overline{x(t_1, \ldots, t_n)} y(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \cdots dt_n,$$

то мы получим гильбертово (т.е. полное, сепарабельное, со скалярным произведением) пространство, обычно обозначаемое L^2_Ω.

Примеры

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — прямоугольный параллелепипед: $\Omega = \{t \in \mathbb{R}^n : \quad -\pi \le t_i \le \pi, \}$

Легко проверить, что система функций $e_{j_1, j_2, \ldots, j_n}$, $j_k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm r, \ldots,$ $k = 1, 2, \ldots n$, задаваемых соотношениями

$$e_{j_1, j_2, \ldots, j_n} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{i\langle j|t\rangle} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{i(j_1 t_1 + j_2 t_2 + \cdots + j_n t_n)}$$

ортонормирована и полна в L^2_Ω. Ряд Фурье по этой системе называется *кратным тригонометрическим* рядом.

Как было установлено выше, для любого элемента x из L^2_Ω ряд, с коэффициентами

$$x_{j_1, j_2, \ldots, j_n} = \langle x|e_{j_1, j_2, \ldots, j_n}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \iint \ldots \int \overline{x(t_1, \ldots, t_n)} e^{i(j_1 t_1 + j_2 t_2 + \cdots + j_n t_n)} dt_1 \cdots dt_n$$

сходится к этому элементу, и, следовательно, этот элемент представим в виде:

$$x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{j_1=-\infty}^{\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=-\infty}^{\infty} x_{j_1, j_2, \ldots, j_n} e^{i(j_1 t_1 + j_2 t_2 + \cdots + j_n t_n)}.$$

1.3. Прямое произведение

Прямое произведение множеств. Пусть $X = \{x, ...\}$ и $Y = \{y, ...\}$ произвольные множества. *Прямым или декартовым произведением множеств* X и Y называется множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары элементов этих множеств. Обозначается прямое произведение так $X \times Y$. По определению $X \times Y = \{(x, y) : \quad x \in X, y \in Y\}$.

Аналогичным образом определяется произведение нескольких (в том числе и в бесконечном количестве) множеств

$$X \times Y \times \ldots \times Z = \{(x, y, \ldots z) : \quad x \in X, y \in Y, \ldots z \in Z\}$$

и степени множества X: $X^n = X \times X \times \ldots \times X$. Здесь $n \in \mathbb{N}$.

Например, единичный куб I^n в $\mathbb{R}^n$ является n-ой степенью единичного отрезка $[0; 1]$, а координатное пространство $\mathbb{R}^n$ может рассматриваться как n-ая степень числовой прямой $\mathbb{R}$, его же можно рассматривать как прямое произведение пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^l$, если только $m + l = n$.

Прямое произведение метрических пространств. Пусть теперь (X, μ_x) и (Y, μ_y) – метрические пространства.

Прямым произведением метрических пространств (X, μ_x) и (Y, μ_y) называется метрическое пространство $(Z, \mu_z) = (X, \mu_x) \times (Y, \mu_y)$, элементами z которого являются элементы прямого произведения $X \times Y: \ z = (x, y)$, а метрика задана одним из соотношений: если $z_1 = (x_1, y_1)$, а $z_2 = (x_2, y_2)$, то

$$\textbf{I}. \quad \mu_z(z_1, z_2) = \sqrt{\mu_x^2(x_1, x_2) + \mu_y^2(y_1, y_2)};$$

$$\textbf{II}. \quad \mu_z(z_1, z_2) = \mu_x(x_1, x_2) + \mu_y(y_1, y_2);$$

$$\textbf{III}. \quad \mu_z(z_1, z_2) = \max\{\mu_x(x_1, x_2); \mu_y(y_1, y_2)\}.$$

Легко убедиться в том, что соотношения I, II и III задают метрику и эти метрики эквивалентны.

Прямое произведение линейных нормированных пространств.

Если $(L_1, \|\cdot\|_1)$ и $(L_2, \|\cdot\|_2)$ — линейные нормированные пространства, то под прямым произведением этих пространств понимают пространство

$$(L, \|\cdot\|) = (L_1, \|\cdot\|_1) \times (L_2, \|\cdot\|_2).$$

элементы которого – упорядоченные пары элементов, соответственно, множеств L_1, L_2, линейная структура определяется покомпонентно, — если $z_1, z_2 \in L, z_i = (x_i, y_i)$, то $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, \quad \lambda z = (\lambda x, \lambda y)$, а норма в L может быть определена любым из соотношений:

$$\textbf{I}. \quad \|z\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y^2\|};$$

$$\textbf{II}. \quad \|z\| = \|x\| + \|y\|;$$

$$\textbf{III}. \quad \|z\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Например, декартов квадрат пространства $C_{[a;b]}$ – это пространство, элементами которого являются двухкомпонентные вектор-функции $z = (\varphi(t); \psi(t))$ с нормой, задаваемой соотношением

$$\|z\| = \max\{\max_{a \le t \le b} |\varphi(t)|; \max_{a \le t \le b} |\psi(t)|\}, \quad t \in [a; b].$$

Отметим, что прямое произведение банаховых пространств – банахово пространство.

Прямое произведение гильбертовых пространств.

Если $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}_2$ – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle x|y\rangle_1$ и $\langle u|v\rangle_2$, то их прямое произведение строится по схеме, рассмотренной выше, при этом скалярное произведение определяется следующим образом: для произвольных $z_1 = (x,u), z_2 = (y,v) \in \mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_2$ полагают

$$\langle z_1|z_2\rangle = \langle x|y\rangle_1 + \langle u|v\rangle_2.$$

Все аксиомы скалярного произведения легко могут быть проверены.

Например, прямое произведение $l^2 \times \mathbb{R}^n$ совпадает с l^2.

1.4. Прямая сумма

Прямая сумма линейных пространств. Конечное число слагаемых.

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_n$ произвольные линейные пространства. Их *прямой суммой* назовем пространство L, элементы которого – элементы прямого произведения $L = L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_n$, т.е., упорядоченные наборы x элементов $x_k: \ x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, а линейная структура на прямом произведении пространств L_k задается покомпонентными операциями сложения и умножения на число:

$$x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\}, \quad \lambda \cdot x = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n.\}$$

Если линейные пространства L_k, помимо линейной, наделены еще и структурой нормированного или гильбертова пространства, то, как показано выше, их прямая сумма также может быть наделена этими структурами.

Следует отметить, что в случае конечного числа слагаемых *прямая сумма* и *прямое произведение* являются идентичными конструкциями.

В рамках прямой суммы пространства-слагаемые L_k естественно отождествляются с подпространствами $\tilde{L}_k$ пространства L, образованными упорядоченными наборами $x = \{\odot, \ldots, \odot, x_k, \odot, \ldots, \odot\}$, в которых все компоненты, кроме, быть может k-ой, нули. При таком отождествлении L оказывается *прямой суммой своих подпространств* в том смысле, что

1. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \tilde{L}_k = L, \ \tilde{L}_k \cap \tilde{L}_s = \odot, k \neq s;$
2. $\forall x_k \in L_k \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \odot \ \Leftrightarrow \ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \odot.$

Для дальнейшего важно отметить, что если пространства-слагаемые — гильбертовы $L_k = H_k$, то так определенная сумма обладает свойством *ортогональности* — $\forall\ k \neq s:\ \tilde{H}_k \perp \tilde{H}_s$, т.е.

$$\forall x \in H_k, y \in H_s:\ \langle x|y\rangle_L = 0$$

и называется *ортогональной прямой суммой* подпространств $\tilde{H}_k$ гильбертова пространства $\mathbb{H}$. В этом случае, как легко убедиться, справедлива теорема Пифагора

$$\forall x \in \mathbb{H}:\ \|x\|^2_{\mathbb{H}} = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2_{H_k}$$

Разложение линейного пространства в прямую сумму подпространств.

Пусть L – линейное пространство, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ его — подпространства, обладающие следующими свойствами:

1. $L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_n = L$;
2. $\forall x_k \in L_k\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \odot\ \Leftrightarrow\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \odot$.

Тогда говорят, что пространство L разложено в *прямую сумму* подпространств L_k и записывают это обстоятельство так

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_n = \bigoplus_{k=1}^{n} L_k.$$

Очевидно, что прямые слагаемые L_k не имеют общих элементов, кроме нулевого $L_k \cap L_s = \odot,\ k \neq s$, и при этом всякий элемент пространства L *единственным образом представим в виде суммы элементов, принадлежащих пространствам-слагаемым*:

$$\forall x \in L\ \exists!\ \{x_k \in L_k, k = 1, 2, \ldots n\}:\quad x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

◀ Если предположить, что некоторый элемент $x \in L$ представим двумя различными разложениями:

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n,$$

то, вычитая одно из другого, приходим к равенству

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + \cdots + (x_n - y_n) = \odot,$$

которое (в силу свойства 2) возможно лишь если $x_k - y_k = \odot$, откуда и следует искомое. ▶

Примеры

I. Пусть $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство, L – его подпространство, $L^{\perp}$ – ортогональное дополнение к подпространству L. Выберем ортонормированный базис $\{e_k\}$ в L и дополним его до базиса в $\mathbb{H}$ ортонормированным базисом $\{e'_s\}$ в $L^{\perp}$. Любой вектор из $\mathbb{H}$ единственным образом представим в виде суммы двух слагаемых, одно из которых из L, а другое – из ортогонального дополнения $L^{\perp}$:

$$x = \sum x_k e_k + \sum x'_s e'_s = x_L + x_{L^{\perp}}.$$

Т.о., каково бы ни было подпространство L, пространство $\mathbb{H}$ всегда допускает разложение в ортогональную прямую сумму L и $L^{\perp}$: $\mathbb{H} = L \oplus L^{\perp}$. Элемент x_L называется *ортогональной проекцией* элемента x на подпространство L и обозначается $= \mathcal{P}_L(x)$.

Некоторые, очевидные свойства операции проектирования приведены ниже.

1. Если $x \in L$, то $\mathcal{P}_L(x) = x$;

2. если $x \in L^{\perp}$, то $\mathcal{P}_L(x) = \odot$;

3. $\|x\|^2 = \|\mathcal{P}_L(x)\|^2 + \|\mathcal{P}_{L^{\perp}}(x)\|^2$;

4. $\mathcal{P}_L^2(x) = \mathcal{P}_L(\mathcal{P}_L(x)) = \mathcal{P}_L(x)$;

5. Пусть e, $\|e\| = 1$ – произвольный нормированный вектор из $\mathbb{H}$. Если $L = \{x \in \mathbb{H} : \ x = \lambda e\}$, то $\mathcal{P}_L(y) = \langle e|y\rangle \cdot e, \quad \forall y \in \mathbb{H}$.

II. Если в качестве L взять $\mathbb{R}^3$, в качестве $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_2 = x_3 = 0\}$, а в качестве $L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = 0\}$, то справедливо разложение $\mathbb{R}^3 = L_1 \oplus L_2$.

III. Еще один интересный пример разложения гильбертова пространства в прямую сумму подпространств строится так: возьмем отрезок $[0;1]$ и разобъем его на n частей $[0;1] = [0, a_1) + [a_1; a_2) + \dots + [a_{n-1}; 1]$. Легко установить, что при этом пространство $L^2_{[0;1]}$ будет прямой суммой подпространств $L^2_{[a_{k-1};a_k)}, a_0 = 0, a_n = 1$.

Все рассмотренные примеры — это разложения гильбертовых пространств в прямую *ортогональную* сумму их подпространств. Легко привести пример неортогональной прямой суммы.

IV. Пусть $\mathbb{H} = \mathbb{R}^2$,

$$H_1 = \{(t, 0), t \in \mathbb{R}\}, H_2 = \{(\tau, \tau), \tau \in \mathbb{R}.\}$$

Любой вектор $x = (x_1, x_2)$ однозначно представим в виде

$$x = (x_1 - x_2, 0) + (x_2, x_2), (x_1 - x_2, 0) \in H_1, (x_2, x_2) \in H_2$$

и, тем самым, $\mathbb{H} = H_1 \oplus H_2$, но эта прямая сумма ортогональной не является.

Конструкция прямого суммирования пространств (подпространств) может быть распространена и на случай бесконечного количества слагаемых – счетного или даже более, чем счетного.

Рассмотрим, как реализуется конструкция счетного прямого суммирования в случае банаховых и гильбертовых пространств.

Счетная прямая сумма банаховых пространств

Пусть $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ – банаховы пространства.

Положим L – пространство, элементы которого счетные последовательности x элементов $x_k \in L_k$, для которых выполнено условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{L_k} < \infty$:

$$L = \left\{ x | x_k \in L_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{L_k} < +\infty \right\}.$$

Умножение элементов $x \in L$ на число λ и сложение определим покомпонентно:

$$\lambda \cdot x = \{\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n, \ldots\},\ x + y = \{x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots\}$$

и, тем самым, зададим на L линейную структуру. Если теперь задать норму соотношением

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{L_k},$$

то L становится банаховым пространством, которое и называется счетной прямой суммой банаховых пространств L_k:

$$L = \bigoplus_{k=1}^{\infty} L_k.$$

Если отождествить пространства L_k с подпространствами пространства L, которые определяются как $\hat{L}_k = \{x \in L :\ x_s = \odot, s \neq k\}$, то легко видеть, что, как и в случае конечного числа слагаемых, выполняются соотношения:

$$L = \bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{L}_k,\ \hat{L}_s \cap \hat{L}_k = \odot, k \neq s$$

и всякий элемент $x \in L$ единственным образом представим в виде

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots,\ x_k \in \hat{L}_k.$$

Если $L_k = \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots$ то, как легко убедиться, их счетная прямая сумма может быть отождествлена с вещественным пространством l^1 суммируемых последовательностей, так что $l^1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots$.

Счетная прямая сумма гильбертовых пространств

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ – гильбертовы пространства.

Определим пространство $\mathbb{H}$ как совокупность счетных последовательностей x элементов $x_k \in H_k$, для которых выполнено условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2_{H_k} < \infty$:

$$L = \left\{ x = \{x_1, x_2, \dots\} | x_k \in H_k, \ \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2_{H_k} < +\infty \right\}.$$

Умножение элементов $x \in \mathbb{H}$ на число λ и сложение определим, как и для банаховых пространств, покомпонентно:

$$\lambda \cdot x = \{\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \dots\}, \ x + y = \{x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots\}.$$

Если теперь задать скалярное умножение соотношением

$$\langle x|y\rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k|y_k\rangle_{H_k},$$

где $\langle x_k|y_k\rangle_{H_k}$ – скалярное произведение в H_k, то $\mathbb{H}$ становится гильбертовым пространством, которое называется счетной прямой суммой гильбертовых пространств H_k:

$$\mathbb{H} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k.$$

Каждое из слагаемых H_k естественно отождествить с подпространством $\tilde{H}_k$, которое состоит из элементов $x \in \mathbb{H}$, все компоненты которых нули, за исключением, быть может, компоненты с номером k: $\tilde{H}_k = \{x \in \mathbb{H} : \ x_s = \odot \ \forall s \neq k\}$. При таком отождествлении слагаемые прямой суммы будут ортогональными друг другу: $\tilde{H}_k \perp \tilde{H}_s, k \neq s$ и сумма называется *ортогональной прямой суммой*, а разложение $\mathbb{H} = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{H}_k$ – разложением гильбертова пространства в ортогональную прямую сумму его подпространств.

Если $\mathbb{H} = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} \tilde{H}_k$ – разложение гильбертова пространства в ортогональную прямую сумму, то всякий элемент из $\mathbb{H}$ единственным образом представим в виде сходящегося ряда

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots, \ x_k \in \tilde{H}_k$$

и имеет место равенство (теорема Пифагора) $\|x\|^2_{\mathbb{H}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2_{\mathbb{H}}$.

Пример. Если $L_k = \mathbb{R}, \ k = 1, 2, \dots$ то, как легко убедиться, их счетная прямая сумма может быть отождествлена с вещественным пространством l^2 суммируемых с квадратом последовательностей, так что $l^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots$.

Следует обратить внимание на то, что банахова прямая сумма отличается от гильбертовой в случае счетного числа слагаемых, в то время как, в случае конечного суммирования, эти суммы совпадают.

Координаты элемента счетной прямой суммы.

Пусть гильбертово пространство $\mathbb{H}$ разложено в ортогональную счетную прямую сумму подпространств $H_k, k = 1, 2, \ldots$:

$$\mathbb{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_k \oplus \cdots .$$

Положим $n(k) = \dim H_k,\ n(k) = 1, 2, \ldots, +\infty$. В каждом из пространств H_k есть ортонормированный базис $\{e_k^s,\ s = 1, 2, \ldots, n(k)\}$, такой, что всякий элемент x_k из H_k представим в виде сходящегося ряда[40]

$$x_k = x_k^1 e_k^1 + x_k^2 e_k^2 + \cdots .$$

Тогда объединение всех базисных векторов

$$\mathcal{E} = \{e_k^s,\ k = 1, 2, \ldots,\ s = 1, 2, \ldots, n(k)\},$$

образует ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{H}$.

◀ Действительно, в силу ортогональности прямой суммы, векторы e_k^s попарно ортогональны при любых значениях индексов k, если только индексы s у них различны, а для совпадающих s $e_k^s \perp e_n^s,\ k \neq n$, что следует из ортогональности выбранного в H_k базиса. Нормированность системы $\{e_k^s,\ s = 1, 2, \ldots, n(k), k = 1, 2, \ldots\}$ очевидна.

Если $x \in \mathbb{H}$, то он единственным образом разлагается в сумму $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k,\ x_k \in H_k$, а каждое слагаемое $x_k \in H_k$, в свою очередь, представимо в виде $x_k = \sum\limits_{s=1}^{n(k)} x_k^s e_k^s$, откуда для произвольного $x \in \mathbb{H}$ получаем:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{n(k)} x_k^s e_k^s.$$

Коэффициенты этого разложения – координаты вектора – могут быть найдены обычным образом — $x_k^s = \langle e_k^s | x \rangle$. ▶

1.5. Непрерывная прямая сумма (интеграл) гильбертовых пространств

Распространим понятие ортогональной прямой суммы гильбертовых пространств на случай, когда количество слагаемых более чем счетно.

[40] Или конечной суммы в случае $n(k) < \infty$.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathbb{R}$ некоторое (м.б., несчетное,) подмножество множества действительных чисел[41], на котором задана мера μ. Обычным образом (например, [3],) для любой μ-измеримой числовой функции $\varphi(\alpha)$ на $\mathcal{A}$ определим интеграл $\int\limits_{\mathcal{A}} \varphi(\alpha) d\mu(\alpha)$.

Важными для квантовой механики примерами являются следующие частные случаи.

1. $\mathcal{A} = \{\alpha_k\}$ – конечное или счетное множество точек на числовой прямой, $\mu(\alpha_k) = 1$, $\int\limits_{\mathcal{A}} \varphi(\alpha) d\mu(\alpha) = \sum\limits_k \varphi(\alpha_k)$.

2. $\mathcal{A} = \{\alpha : \ \alpha \in [a;b]\}$ – отрезок числовой прямой, $\mu(\alpha)$ – мера Лебега, $\int\limits_{\mathcal{A}} \varphi(\alpha) d\mu(\alpha) = \int\limits_{[a;b]} \varphi(\alpha) d\alpha$ – интеграл Лебега.

Пусть каждому значению $\alpha \in \mathcal{A}$ поставлено в соответствие гильбертово пространство H_α размерности n_α[42].

Заметим, что множество возможных значений n_α не более чем счетно[43]. В дальнейшем будем считать, что $\mathcal{A}$ можно представить в виде не более счетного объединения попарно непересекающихся подмножеств $\mathcal{A}_k$ положительной меры[44] и таких, что размерность гильбертовых пространств H_α одна и та же $\forall \alpha \in \mathcal{A}_k$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \cdots + \mathcal{A}_k + \cdots , \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_k : \ n_\alpha = n_k.$$

При этом упомянутый выше интеграл может быть записан в виде

$$\int\limits_{\mathcal{A}} \varphi(\alpha) d\mu(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{A}_k} \varphi(\alpha) d\mu(\alpha).$$

Пусть, далее, $\mathbf{x} = \{x(\alpha)\}$ — векторная функция, определенная почти всюду на $\mathcal{A}$, и принимающая в каждой точке α значение из гильбертова пространства H_α:

$$\mathbf{x} = \{x(\alpha)\} : \ \mathcal{A} \ \to \ H_\alpha.$$

Линейные операции над векторными функциями определим покомпонентно, положив

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x(\alpha) + y(\alpha)\}, \quad \lambda \cdot \mathbf{x} = \{\lambda x(\alpha)\},$$

[41] Общую конструкцию непрерывной прямой суммы гильбертовых пространств для случая произвольного индексного множества $\mathcal{A}$ можно найти, например, в книге [7].

[42] Другими словами, семейство гильбертовых пространств занумеровано точками множества $\mathcal{A}$.

[43] Размерность гильбертова пространства — целое положительное число либо $+\infty$.

[44] Исключая, тем самым, возможность *неизмеримости* каких-то из множеств $\mathcal{A}_k = \{\alpha \in \mathcal{A} : \ \dim H_\alpha = n_k = const\}$.

а скалярное умножение $\mathbf{x}$ на $\mathbf{y}$ зададим соотношением

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{A}_k} \langle x(\alpha)|y(\alpha)\rangle_{H_k} d\mu(\alpha).$$

Совокупность векторных функций $\mathbf{x}$*, дополнительно удовлетворяющих условию* $\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 < +\infty$*, с так определенными линейными операциями и скалярным произведением, назовем непрерывной прямой суммой (интегралом) гильбертовых пространств* H_α. Обозначение

$$\mathbb{H} = \int\limits_{\mathcal{A}} H_\alpha d\mu(\alpha).$$

Легко установить ([7]), что $\mathbb{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство.

Примеры. I. Если $\mathcal{A} = \{\alpha_k\}$ – конечное или счетное множество точек на числовой прямой, $\mu(\alpha_k) = 1$, H_k – гильбертовы пространства, то $\mathbb{H}$ в этом случае — рассмотренная выше конечная или счетная прямая сумма пространств H_k.

II. Если $\mathcal{A} = \{\alpha : \ \alpha \in [a;b]\}$ – отрезок числовой прямой, $\mu(\alpha)$ – мера Лебега, $H_\alpha \equiv \mathbb{R}$, то $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство $L^2_{[a;b]}$.

III. Если, как и выше, $\mathcal{A} = \{\alpha : \ \alpha \in [a;b]\}$ – отрезок числовой прямой, $\mu(\alpha)$ – мера Лебега, $H_\alpha \equiv \mathrm{L}^2_{[c;d]}$, то в этом случае $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство $L^2_{[a;b]\times[c;d]}$ функций двух переменных, определенных на прямоугольнике $[a;b]\times[c;d]$ и интегрируемых там с квадратом.

В приложениях часто используется другая (т.н. *координатная*) форма представления элементов пространства $\mathbb{H}$, когда каждый элемент (т.е., векторная функция $\mathbf{x}$) непрерывной прямой суммы отождествляется с числовой функциональной последовательностью $\{a_k(\alpha)\}_{k=1}^{\infty}$, элементы которой удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{A}} |a_k(\alpha)|^2 d\mu(\alpha) < +\infty, \quad a_k(\alpha) = 0, k > n(\alpha).$$

Подробнее об этом — в книге [8]

1.6. Тензорное произведение

Произведение линейных пространств. Пусть L_1 и L_2 – линейные векторные пространства. Элементы этих пространств будем обозначать символами x (если понадобится – с индексами) в случае $x \in L_1$ и y, в случае $y \in L_2$.

Рассмотрим прямое произведение $L_1 \times L_2$ — совокупность упорядоченных пар $(x; y)$, $\quad x \in L_1, y \in L_2$. Для каждой такой пары примем обозначение[45] $x \otimes y$.

Суммой двух пар $x_1 \otimes y_1$ и $x_2 \otimes y_2$ назовем формальное[46] выражение вида $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2$. Заметим, что сумма – новый объект, образованный двумя упорядоченными парами и сам упорядоченной парой не являющийся. Для любого числа положим $\lambda \cdot (x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$. Потребуем, чтобы операции сложения и умножения на число обладали следующими свойствами:

1. $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 = x_2 \otimes y_2 + x_1 \otimes y_1$;
2. $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y; \quad x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$;
3. $\lambda(x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2) = \lambda(x_1 \otimes y_1) + \lambda(x_2 \otimes y_2)$.

Рассмотрим множество L всех конечных формальных выражений (слов), которые можно образовать из упорядоченных пар определенным выше способом:

$$L = \{z : \ z = \lambda_1 x_1 \otimes y_1 + \lambda_2 x_2 \otimes y_2 + \cdots + \lambda_n x_n \otimes y_n, \ x_i \in L_1, y_i \in L_2.\}$$

Легко установить, что L – линейное пространство, в котором роль нулевого элемента играет пара $0_z = 0_x \otimes 0_y$, а противоположным к элементу $z = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \cdots + x_n \otimes y_n$ будет элемент $-z = (-1)(x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \cdots + x_n \otimes y_n)$.

Тензорным произведением $L_1 \otimes L_2$ пространств L_1 и L_2 называют пространство L, элементами которого являются произвольные формальные выражения вида $z = \lambda_1 x_1 \otimes y_1 + \lambda_2 x_2 \otimes y_2 + \cdots + \lambda_n x_n \otimes y_n$ с определенными выше операциями сложения

$$z_1 + z_2 = (x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \cdots + x_n \otimes y_n) + (x_1' \otimes y_1' + x_2' \otimes y_2' + \cdots + x_m' \otimes y_m') =$$

$$x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \cdots + x_n \otimes y_n + x_1' \otimes y_1' + x_2' \otimes y_2' + \cdots + x_m' \otimes y_m'$$

и умножения на число

$$\lambda z = \lambda(x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \cdots + x_n \otimes y_n) = \sum_1^n (\lambda x_i) \otimes y_i.$$

[45]Заметим, что мы пока не придаем символу $\otimes$ никакого операционного смысла, это просто значок, свидетельствующий, что элемент $x \in L_1$ объединён в упорядоченную пару с элементом $y \in L_2$.

[46]Значок "+"ничего не обозначает, кроме того, что свидетельствует об объединении двух символов в некоторый новый комплекс, условно называемый *суммой*

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий конструкцию тензорного умножения пространств. Пусть $L_1 = \mathbb{R}^m,\ L_2 = \mathbb{R}^k$.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Для каждой пары x, y определим операцию "спаривания"по следующему правилу:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k \Rightarrow x \otimes y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_k \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \cdots & x_my_k \end{pmatrix},$$

поставив этой паре в соответствие матрицу формата $[m \times k]$. Легко установить, что при этом абстрактная операция "+" преращается в операцию сложения матриц, операция умножения на число — в операцию умножения матрицы на число, и обе операции удовлетворяет всем требованиям, оговоренным выше.

Таким образом, заключаем, что тензорное произведение $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^k$ оказывается (с точностью до изоморфизма) пространством матриц формата $[m \times k]$.

В заключение отметим, что аналогичным образом определяется тензорное произведение любого конечного числа пространств

$$L = L_1 \otimes \ldots \otimes L_n,$$

в том числе и тензорная степень линейного пространства: $L \otimes \cdots \otimes L = L^{n\otimes}$. Так, например, элементами тензорного произведения трех пространств $L_1 \otimes L_2 \otimes L_3$ являются формальные комплексы

$$x_1 \otimes y_1 \otimes z_1 + \ldots + x_n \otimes y_n \otimes z_n,$$

где x_i – элементы L_1, y_i – элементы L_2 и z_i – элементы L_3. Операции сложения комплексов и умножения на число задаются так же, как и выше.

Тензорное умножение обладает свойством ассоциативности: $(L_1 \otimes L_2) \otimes L_3 = L_1 \otimes (L_2 \otimes L_3)$, однако некоммутативно: $L_1 \otimes L_2 \neq L_2 \otimes L_1$.

Произведение гильбертовых пространств. Особый интерес для физики представляет конструкция тензорного произведения в ситуации, когда пространства - множители наделены некоторой структурой. Например, если пространства - сомножители — гильбертовы, то хотелось бы, чтобы их тензорное произведение тоже допускало структуру гильбертова пространства. Ниже мы рассмотрим, как структуры гильбертова пространства определяются на тензорном произведении.

Пусть $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ – гильбертовы пространства с элементами $x \in \mathbb{H}_1, y \in \mathbb{H}_2$, скалярными произведениями $\langle x_1|x_2\rangle_1$ и $\langle y_1|y_2\rangle_2$ и ортонормированными базисами $\{e_i\}_1^\infty \in \mathbb{H}_1, \{g_i\}_1^\infty \in \mathbb{H}_2$ соответственно. Рассмотрим элементы $u \otimes v$ прямого произведения $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$ и определим функцию двух переменных $\varphi_{uv}(x, y)$ на прямом произведении по правилу:

$$u \otimes v = \varphi_{uv}(x, y) = \langle u|x\rangle\langle v|y\rangle.$$

Два формально различных[47] элемента $u_1 \otimes v_1$ и $u_2 \otimes v_2$ будем считать идентичными, если

$$\forall x \in \mathbb{H}_1, y \in \mathbb{H}_2 : \quad \varphi_{u_1 v_1} \equiv \varphi_{u_2 v_2}$$

и в дальнейшем не будем их различать.

Например, пары $0_1 \otimes v, u \otimes 0_2, 0_1 \otimes 0_2$, где $0_1, 0_2$ – нулевые элементы пространств $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$, с упомянутой точки зрения неразличимы.

Далее, рассмотрим конечные линейные комбинации пар $u \otimes v$ элементов $u \in \mathbb{H}_1$ и $v \in \mathbb{H}_2$:

$$z = \lambda_1 u_1 \otimes v_1 + \lambda_2 u_2 \otimes v_2 + \cdots + \lambda_n u_n \otimes v_n$$

с оговоренными выше правилами отождествления, сложения и умножения на числа.

Это пространство будем называть *алгебраическим тензорным произведением* линейных пространств $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$.

Для "одночленных" комплексов $z_1 = u_1 \otimes v_1, z_2 = u_2 \otimes v_2$ положим

$$\langle z_1|z_2\rangle = \langle u_1|u_2\rangle_1 \cdot \langle v_1|v_2\rangle_2. \tag{1.6.1}$$

Для линейных комбинаций потребуем, чтобы выполнялось свойство аддитивности и однородности умножения:

$$\langle z_1 + z_2|z_3\rangle = \langle z_1|z_3\rangle + \langle z_2|z_3\rangle, \quad \langle z_1|\lambda z_2\rangle = \lambda\langle z_1|z_2\rangle.$$

Так определенное умножение очевидно обладает свойством $\langle z_1|z_2\rangle = \overline{\langle z_2|z_1\rangle}$ и, как следствие, свойством $\langle \mu z_1|z_2\rangle = \overline{\mu}\langle z_1|z_2\rangle$.

Покажем, что умножение (1.6.1) удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к скалярному умножению.

Соглашение об отождествлении элементов приводит к тому, что один и тот же элемент может быть представлен линейными комбинациями различных элементов. Поэтому, первым делом следует убедиться, что умножение

[47] Т.е. при $(u_1 \neq u_2) \cup (v_1 \neq v_2)$

(1.6.1) не зависит от того, какими линейными комбинациями представлены сомножители.

Рассмотрим $\langle z|w\rangle$ для произвольных элементов z и w алгебраического тензорного произведения. Пусть, например, элемент w представлен двумя различными линейными комбинациями:

$$w = \sum_1^m \alpha_i u_i \otimes v_i = w' = \sum_1^k \alpha'_j u'_j \otimes v'_j.$$

Тогда

$$\langle z|w\rangle - \langle z|w'\rangle = \langle z|w - w'\rangle = \langle z|0\rangle = 0.$$

Отсюда — для доказательства независимости произведения (1.6.1) от представления множителей достаточно доказать, что для любого элемента z произведение $\langle z|0\rangle = 0$ и не зависит от представления нулевого элемента.

◀ Пусть элемент z представлен линейной комбинацией $z = \sum c_i u_i \otimes v_i$, нулевой элемент – комбинацией $w_0 = \sum \alpha_j u'_j \otimes v'_j$. Напомним (см. выше), что последнее означает

$$\forall x, y: \; w_0 = \sum \alpha_j u'_j \otimes v'_j = \sum \alpha_j \varphi_{u'_j v'_j}(x, y) = 0.$$

Тогда

$$\langle z|w_0\rangle = \langle \sum c_i u_i \otimes v_i | \sum \alpha_j u'_j \otimes v'_j\rangle = \sum_i \sum_j \bar{c}_i \alpha_j \langle u_i \otimes v_i | u'_j \otimes v'_j\rangle.$$

Поскольку

$$\langle u_i \otimes v_i | u'_j \otimes v'_j\rangle = \langle u_i|u'_j\rangle_1 \langle v_i|v'_j\rangle_2 = \varphi_{u'_j v'_j}(u_i, v_i),$$

постольку

$$\langle z|w_0\rangle = \sum_i \bar{c}_i \sum_j \alpha_j \varphi_{u'_j v'_j}(u_i, v_i)$$

и, в силу напоминания, $\langle z|w_0\rangle = 0$ для любого z независимо от представления нулевого элемента.▶

Умножение (1.6.1) по определению аддитивно и однородно. Осталось убедиться в том, что для произвольного $z: \; \langle z|z\rangle \geq 0$ и $\langle z|z\rangle = 0 \Leftrightarrow z = w_0$, где w_0 – нулевой элемент.

◀ Пусть элемент z дан конечной линейной комбинацией $z = \sum_1^n c_i u_i \otimes v_i$. Линейная оболочка $L[u_1, \ldots, u_n]$ элементов u_i образует конечномерное линейное подпространство в $\mathbb{H}_1$, линейная оболочка $L[v_1, \ldots, v_n]$ – в $\mathbb{H}_2$. Выберем ортонормированные базисы: $\{e_i\}_1^m$ в $L[u_1, \ldots, u_n]$ и $\{g_j\}_1^l$ в $L[v_1, \ldots, v_n]$ и разложим элементы u_i, v_i по этим базисам:

$$u_i = \sum_{s=1}^m \alpha_s^i e_s, v_i = \sum_{t=1}^l \beta_t^i g_t \quad \Rightarrow \quad z = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{s=1}^m \alpha_s^i e_s \otimes \sum_{t=1}^l \beta_t^i g_t = \sum_{s,t=1}^{m,l} A_{st} e_s \otimes g_t.$$

Здесь коэффициенты A_{st} даются соотношением $A_{st} = \sum_{i=1}^n \alpha_s^i \beta_t^i$. Для $\langle z|z\rangle$ получаем

$$\langle \sum A_{st} e_s \otimes g_t | A_{pq} e_p \otimes g_q\rangle = \sum_{s,t} \sum_{p,q} \overline{A_{st}} A_{pq} \langle e_s \otimes g_t | e_p \otimes g_q\rangle = \sum_{s,t} \overline{A_{st}} A_{st} \langle e_s|e_s\rangle \langle g_t|g_t\rangle = \sum |A_{st}|^2.$$

►

Тем самым установлено, что (1.6.1) задает скалярное произведение на множестве эквивалентных конечных линейных комбинаций упорядоченных пар элементов рассматриваемых пространств.

Тензорным произведением гильбертовых пространств называется гильбертово пространство, полученное пополнением множества эквивалентных конечных линейных комбинаций упорядоченных пар элементов пространств-сомножителей $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ относительно скалярного произведения (1.6.1).

Важным свойством[48] тензорного произведения гильбертовых пространств является то обстоятельство, что *если* $\{e_i\}_1^\infty$ *и* $\{g_j\}_1^\infty$ *— ортонормированные базисы в сомножителях, то система элементов* $\{e_i \otimes g_j\}$ *образует ортонормированный базис в их тензорном произведении.*

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих расмотренную выше конструкцию.

Примеры.

I. Пусть $\mathbb{H}_1 = L^2_{[a;b]}, \mathbb{H}_2 = L^2_{[c;d]}$ и $\{e_i(t)\}_1^\infty$ и $\{g_j(\tau)\}_1^\infty$ — ортонормированные базисы в этих пространствах. Как отмечено выше, элементы $\{e_i \otimes g_j\}$ образуют ортонормированный базис в тензорном произведении. Каждой паре $e_i(t), g_j(\tau)$ базисных функций поставим в соответствие произведение

$$A : e_i(t) \otimes g_j(\tau) \to e_i(t) \cdot g_j(\tau).$$

Если $u(t) \in L^2_{[a;b]}, v(\tau) \in L^2_{[c;d]}$, то паре $u(t) \otimes v(\tau)$ при этом отображении будет отвечать произведение $u(t)v(\tau)$. ◄ Действительно,

$$A(u(t) \otimes v(\tau)) = A(\sum_i \alpha_i e_i(t) \otimes \sum_j \beta_j g_j(\tau)) = A(\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j e_i(t) \otimes g_j(\tau)) =$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j A(e_i(t) \otimes g_j(\tau)) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j e_i(t) g_j(\tau) = \sum_i \alpha_i e_i(t) \sum_j \beta_j g_j(\tau) = u(t) \cdot v(\tau). \blacktriangleright$$

Скалярное произведение элементов $z_1 = u_1 \otimes v_1$ и $z_2 = u_2 \otimes v_2$ тензорного произведения будет задаваться, в соответствии с общей конструкцией, соотношением:

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = \int\limits_a^b \overline{u_1(t)} u_2(t) dt \int\limits_c^d \overline{v_1(\tau)} v_2(\tau) d\tau = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \overline{u_1(t) v_1(\tau)} u_2(t) v_2(\tau) dt d\tau.$$

Замыкание множества конечных линейных комбинаций элементов $e_i(t) \cdot g_j(\tau)$ относительно так заданного скалярного произведения – это пространство $L^2_{[a;b]\times[c;d]}$ интегрируемых с квадратом функций двух переменных на прямоугольнике $[a;b] \times [c;d]$ со скалярным произведением

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \iint\limits_{[a;b]\times[c;d]} \overline{\varphi(t,\tau)} \psi(t,\tau) dt d\tau.$$

---

[48] Доказательство, например, в книге М.Рида и Б.Саймона [10].

Т.о.мы установили, что $L^2_{[a;b]} \times L^2_{[c;d]} = L^2_{[a;b]\times[c;d]}$.

II. При квантово-механическом описании частицы со спином $\frac{1}{2}$ пространство состояний описывается гильбертовым пространством, элементы которого комплекснозначные векторные функции $(\varphi_1(x), \varphi_2(x)), x \in \mathbb{R}^3$, интегрируемые с квадратом на $\mathbb{R}^3$. Как и выше, легко установить, что это пространство является тензорным произведением пространства $L^2_{\mathbb{R}^3}$ и двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$.

III. Пусть $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство. Обозначим через $\mathbb{H}^{n\otimes}$ его тензорную n-ую степень, полагая $\mathbb{H}^0 = \mathbb{C}$.

Тензорной *симметрической* степенью $S^n(\mathbb{H})$ гильбертова пространства $\mathbb{H}$ называется его n-ая тензорная степень: построенная в предположении, что $x \otimes y = y \otimes x$.

Если предполагать, что $x \otimes x = 0$, то соответствующая степень гильбертова рпространства называется его тензорной *внешней* степенью $\Lambda^n(\mathbb{H})$.

В Стандартной Модели внешние степени $\Lambda^n(\mathbb{H})$ служат моделью для описания фермионов. а симметрические – для описания бозонов.

Эти классы частиц отличаются друг от друга, помимо прочего, отсутствием принципа запрета Паули для бозонов. Грубо говоря, в одной точке пространства может быть не более одного фермиона, но сколько угодно бозонов. Состояния, в которых могут находиться бозоны описываются симметричными волновыми функциями, в то время как состояния фермионов — антисимметричными.

IV. Пространство Фока. *Пространством Фока* называется гильбертово пространство $\mathcal{F}(\mathbb{H})$, задаваемое соотношением

$$\mathcal{F}(\mathbb{H}) = \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^{1\otimes} \oplus \mathbb{H}^{2\otimes} \oplus \mathbb{H}^{3\otimes} \oplus \cdots .$$

Например, если $\mathbb{H} = L^2_{\mathbb{R}}$, то элементы пространства Фока – последовательности функций

$$x \in \mathcal{F}: \quad x = \{x_0; x_1(t_1); x_2(t_1, t_2); x_3(t_1, t_2, t_3); \ldots\},$$

удовлетворяющие условию интегрируемости с квадратом:

$$|x_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |x_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)|^2 dt_1 dt_2 \ldots dt_n < +\infty$$

Глава 2

Линейные операторы

Физика - наука экспериментальная. Это в равной степени относится и к классической, и к квантовой механике. Свойства физических объектов изучаются на основании различного рода измерений, представляющих собой *процесс взаимодействия* системы с неизвестными свойствами (*изучаемой системы*) с системой, свойства которой известны — измерительным прибором. Можно сказать, что при измерении прибор производит некоторые действия или операции над изучаемой системой и определяет ее отклик на эти действия. Для современной квантовой механики понятие измерения является ключевым.

В математике физическая процедура *измерение* описывается функциями, определенными в функциональных пространствах.

Эти функции называются *отображениями* или *операторами*.

С точки зрения математики, измерение — это действие оператора на элемент функционального пространства, который играет роль *изучаемой системы* и представляет состояние квантовой системы до взаимодействия с прибором (до измерения). Результат же действия оператора играет роль отклика и представляет собой состояние системы после того, как измерение завершено.

Таким образом, в квантовой механике с самого начала полагается, что взаимодействие с прибором может привести систему в состояние, весьма отличающееся от исходного, в то время как в классической физике считается, что "хорошие" измерения — это те, что мало изменяют состояние изучаемой системы, а "идеальные" — те, что не изменяют его вовсе.

Настоящий раздел посвящен изучению понятия оператора.

2.1. Отображения

Пусть $\mathbb{B}_x$ и $\mathbb{B}_y$ пара банаховых (т.е. полных, линейных, нормированных) пространств с нормами $\|\cdot\|_x$ и $\|\cdot\|_y$ соответственно.

Если каждому элементу x некоторого подмножества $X \subset \mathbb{B}_x$ поставлен в соответствие единственный элемент y из некоторого $Y \subset \mathbb{B}_y$, то говорят что задано *отображение* A из X в Y и записывают это обычным образом: $y = A(x)$, либо $A: \ X \ \to \ Y$. Множество $\mathrm{Im}A = \{y \in Y: \ y = A(x)\}$ называется *образом* отображения A и обозначается $\mathrm{Im}A = A(X)$. Множество $X \subset \mathbb{B}_x$ называется *прообразом* отображения A и обозначается $A^{-1}(\mathrm{Im}A)$.[1] Отображение называется *сюръективным* или отображением *на*, если его

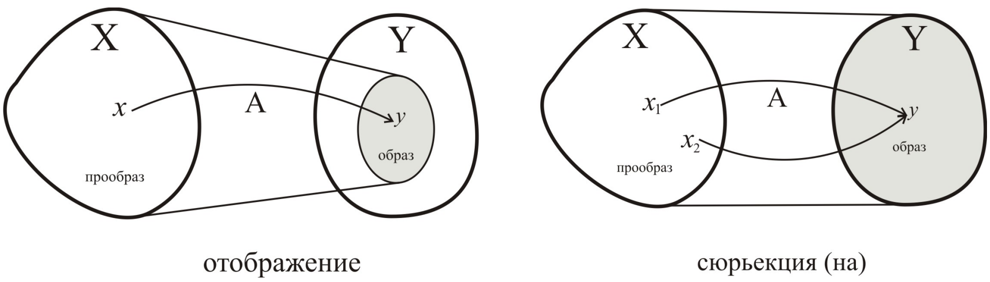

Рис. 2.1. Отображение $y = A(x)$ (слева) и отображение *на* (справа)

образ совпадает со всем множеством Y, *инъективным*, если оно взаимно однозначно $(A(x_1) = A(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$, и биективным, если оно сюръективно и инъективно одновременно[2].

Если отображение инъективно, то множество $A^{-1}(y), \ y \in \mathrm{Im}A$ состоит из единственного элемента x такого, что $y = A(x)$ и, тем самым, каждому $y \in \mathrm{Im}A$ поставлен в соответствие единственный $x = A^{-1}(y)$. Это отображение называется *обратным* к отображению A. Его область определения – образ отображения A, множество значений – область определения отображения A.

Важными примерами отображений являются *тождественные отображения* $I_x : \mathbb{B}_x \to \mathbb{B}_x$ и $I_y : \mathbb{B}_y \to \mathbb{B}_y$, переводящие всякий элемент в самого себя $I_x x = x, \ I_y y = y$.

Ядром отображения называется множество элементов области определения, которые отображением A переводятся в ноль. Ядро обычно обозначается символом $\mathrm{Ker}A$. Таким образом, $\mathrm{Ker}A = \{x \in \mathbb{B}_x : \ A(x) = 0\}$.

[1] Если $y \in Y$, то символом $A^{-1}(y)$ обозначается совокупность всех $x \in X$, таких, что $y = A(x)$.

[2] В русскоязычной научной литературе сюръекция еще называется *накрытием*, инъекция – *вложением*, а биекция — *наложением*.

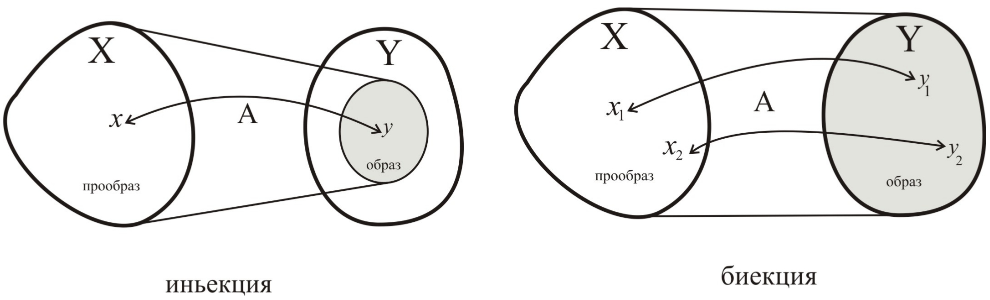

Рис. 2.2. Инъекция (слева) и биекция (справа)

Отображение $A : \mathbb{B}_x \to \mathbb{B}_y$ называется ограниченным, если *образ ограниченного множества является множеством ограниченным.*

Здесь важно отметить, что понятие *ограниченности отображения* несколько отличается от знакомого из курса математического анализа понятия ограниченности функции. Напомним, что функция (одного или нескольких переменных) называется ограниченной, если множество её значений ограничено: $\exists C : \ |f(x)| < C \quad \forall x \in D(f)$. Так, например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой прямой, а функция $y = x$ — нет.

В то же время, отображение $A : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемое соотношением $y = x$, ограничено — легко проверяется, что образ любого ограниченного на числовой прямой множества будет множеством ограниченным. Однако, множество *всех* значений этого отображения неограничено.

Отображение $A(x)$ называется *непрерывным* в точке x_0, если из $x_n \to x_0$ следует $Ax_n \to Ax_0$.

Если $\mathbb{B}_x = \mathbb{B}_y = \mathbb{B}$ и $A : \ \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — отображение, то такое отображение называется *оператором* в $\mathbb{B}$. В современной литературе отображения из $\mathbb{B}_x$ в $\mathbb{B}_y$ также называют операторами. Этой терминологии мы будем придерживаться в дальнейшем.

Отображение $f : \mathbb{B}_x \to \mathbb{C}$ или $f : \mathbb{B}_x \to \mathbb{R}$ называется *функционалом*, комплексным или действительным, соответственно.

Если

$$A : \mathbb{B}_x \to \mathbb{B}_y, \quad B : \mathbb{B}_y \to \mathbb{B}_z$$

– отображения, такие, что область определения оператора B лежит в образе оператора A, то можно определить новый оператор, называемый *суперпозицией* операторов A и B : $B \circ A = BA$, областью определения которого является $D(A) \in \mathbb{B}_x$, а множеством значений (образом) — множество значений $\mathrm{Im}B \in \mathbb{B}_z$ оператора B, действие которого дается правилом

$$\forall x \in D(A) : \ (B \circ A)x = B(Ax).$$

Например, определены суперпозиции $A(A^{-1}(y)) = I_y$ и $A^{-1}(A(x)) = I_x$. Отметим, что если определена суперпозиция $B \circ A$, суперпозиция $A \circ B$ может и не быть определенной, а в случае, когда обе суперпозиции определены, как правило $B \circ A \neq A \circ B$.

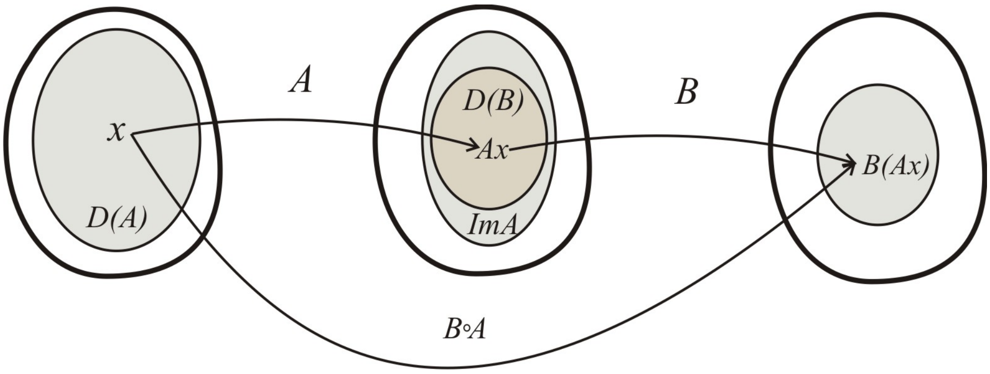

Рис. 2.3. К определению суперпозиции $B \circ A : \mathbb{B}_x \to \mathbb{B}_z$

Операция суперпозиции определяется индуктивно для любого конечного числа операторов: $C \circ B \circ A = C(B \circ A)x$ и обладает следующими, легко проверяемыми, свойствами:

1. $A^0 = I_x, A^n = A \circ A^{n-1}, n = 1, 2, \ldots;$
2. $\forall m, n \in \mathbb{N} : \; A^m \circ A^n = A^n \circ A^m = A^{m+n};$
3. $I_y \circ A = A \circ I_x;$
4. $C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A = C \circ B \circ A.$

Если $L \subset \mathbb{B}_x$ — подпространство пространства $\mathbb{B}_x$, то отображение $A : L \to \mathbb{B}_y$ называется *сужением* или частью оператора A и обозначается A_L.

Если $L \subset \mathbb{B}_x$ — подпространство пространства $\mathbb{B}_x$, $A_L : L \to \mathbb{B}_y$ – отображение из L в $\mathbb{B}_y$, A – оператор в $\mathbb{B}_x$, совпадающий с A_L для всех элементов подпространства $L : \; \forall x \in L \; A_L x = Ax$, то оператор A называется *расширением* отображения A_L.

Ограниченный оператор называется *конечномерным* если его образ — конечномерное пространство.

Любой оператор $A : \; \mathbb{R}^n \; \to \; \mathbb{R}^m$ конечномерен.

2.2. Линейные операторы

2.1. Линейность

Аддитивность, однородность и непрерывность. Пусть $\mathbb{B}_x, \mathbb{B}_y$ – банаховы пространства. Оператор $A : \mathbb{B}_x \to \mathbb{B}_y$ называется *линейным*, если выполнены следующие требования:

1. область определения $X = D(A)$ оператора A – алгебраическое подпространство в $\mathbb{B}_x$ (т.е. замкнута относительно линейных операций[3])

[3] Но, может быть, не является замкнутой относительно предельного перехода.

2. оператор A обладает свойством однородности:

$$\forall x \in D(A), \lambda \in \mathbb{C}: \; A(\lambda x) = \lambda A(x);$$

3. оператор A обладает свойством аддитивности:

$$\forall x, y \in D(A) \; A(x+y) = A(x) + A(y).$$

Оператор называется *непрерывным*, если он непрерывен в нуле.

В конечномерных пространствах всякий аддитивный и однородный оператор обязательно непрерывен. В бесконечномерных пространствах это уже не так.

Отметим, что область значений (образ) линейного оператора — алгебраическое подпространство в $\mathbb{B}_y$. Ядро линейного оператора непусто ($A(0) = 0$) и является алгебраическим подпространством в $\mathbb{B}_x$.

Традиционно принято значение $A(x)$ линейного оператора A на элементе x обозначать Ax, опуская скобки.

В приложениях, в частности и в квантовой механике, чаще всего областью определения линейного отображения является либо все пространство, либо всюду плотное в нем линейное многообразие. В последнем случае *непрерывное отображение всегда может быть расширено до оператора, определенного на всем пространстве.*

Ограниченность и непрерывность. Из требования непрерывности линейного оператора в нуле следует его *непрерывность во всех точках области определения.*

◄ Действительно, пусть $x_0 \neq 0$. Положим $u = x - x_0$ и рассмотрим $Au = A(x - x_0)$. Из непрерывности оператора в т. $x = 0$ заключаем, что сходимость $u_n \to 0$ влечет за собой сходимость $Au_n \to A(0) = 0$. Если $x_n \to x_0$, то $u_n \to 0$, значит $A(x_n - x_0) \to 0$. откуда, в силу аддитивности и однородности линейного оператора, $Ax_n \to Ax_0$, ч.т.д. ►

Теперь обратимся к ограниченности. Легко установить, что всякий линейный непрерывный оператор ограничен[4]. При этом оказывается, что ограниченность линейного оператора эквивалентна выполнению следующего простого неравенства:

$$\|Ax\|_y \leq C \cdot \|x\|_x \quad \forall x \in D(A). \tag{2.2.1}$$

Точнее, *линейный оператор A ограничен тогда и только тогда, когда существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $x \in D(A)$ имеет место неравенство* (2.2.1).

[4]Как и в обычном анализе, из непрерывности функции следует ограниченность.

◀ Пусть S_0^1 — шар единичного радиуса с центром в нуле. Если оператор A ограничен, то образ шара S_0^1– ограниченное множество, т.е. $\|Au\|_y \le C \;\; \forall \|u\|_x \le 1$. Если $x \in D(A)$ — произвольный элемент, то $u = \dfrac{x}{\|x\|_x}$ – элемент единичного шара и, следовательно, $\|A\left(\dfrac{x}{\|x\|_x}\right)\|_y \le C$, откуда, в силу однородности линейного оператора, следует справедливость неравенства (2.2.1).

Обратное утверждение (об ограниченности оператора, ограниченного на единичном шаре) тривиально.▶

Неравенство (2.2.1) дает основание для следующего определения: *нормой линейного оператора A* называется *точная нижняя грань* возможных значений констант C в упомянутом неравенстве. Норма оператора обозначается $\|A\|$. Из определения ясен смысл введенного понятия — норма, это возможный коэффициент растяжения (сжатия) элемента x при действии на него оператора A. Неравенство (2.2.1), с учетом этого определения, может быть переписано в виде

$$\|Ax\|_y \le \|A\| \cdot \|x\|_x \quad \forall x \in \mathbb{B}. \tag{2.2.2}$$

Достаточно легко могут быть установлены следующие свойства нормы линейного оператора:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Мы установили, что всякий непрерывный линейный оператор ограничен. Оказывается, что ограниченность и непрерывность – взаимозаменяемые понятия.

Справедливо утверждение: *аддитивный, однородный и ограниченный оператор непрерывен*

◀ Действительно, пусть A – ограниченный, аддитивный и однородный оператор[5]. Пусть последовательность $x_n \to 0$. Тогда $\|x_n\|_x \to 0$. Из неравенства (2.2.2) заключаем, что

$$\|Ax_n\|_y \le \|A\| \cdot \|x_n\|_x \to 0$$

и, следовательно, последовательность Ax_n сходится к нулю, а значит оператор A непрерывен в нуле. Выше было установлено, что оператор непрерывный в нуле непрерывен в любой точке пространства, чем доказательство и заканчивается.▶

Заметим, что упомянутое выше *расширение непрерывного отображения A_L, определенного на всюду плотном линейном многообразии L, до оператора A на всем пространстве, осуществляется с сохранением нормы*: $\forall x \in L \;\; \|A_L x\|_y = \|Ax\|_y$.

[5]Ненулевой.

Примеры

I. Если $\mathbb{B}_x = \mathbb{B}_y = \mathbb{C}$, то любой линейный оператор (в данном случае – линейная комплекснозначная функция комплексного переменного) имеет вид $y = ax$, где a – некоторое комплексное число.

Норма этого оператора легко находится: $\|A\| = |a|$.

II. Пусть $\mathbb{B}_x = \mathbb{B}_y = \mathbb{C}^n$, A – произвольный линейный оператор $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, Тогда, как известно из курса линейной алгебры, существует матрица M_A, такая, что действие оператора A на элемент x описывается умножением этой матрицы на столбец координат элемента x:

$$A:\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \ \Leftrightarrow\ y = M_A x.\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Норма этого оператора дается соотношением

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} Ax = \sup_{\|x\|=1} \sqrt{\langle M_A x | M_A x\rangle} = \sqrt{\max_{1\le i\le n} |\lambda^i_{M_A^* M_A}|},$$

где M_A^* - матрица, сопряженная с матрицей M_A, а λ_i — собственные числа этой матрицы.

III. В пространстве $C_{[a;b]}$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций рассмотрим оператор умножения на независимую переменную: $\forall x \in C_{[a;b]}:\ Ax = t\cdot x(t)$. Поскольку непрерывность функции $x(t)$ влечет за собой непрерывность функции $y = tx(t)$, то A – оператор из $C_{[a;b]}$ в $C_{[a;b]}$. Однородность и аддитивность очевидны, а непрерывность следует из ограниченности — если $\|x\| < C$, то отсюда и $\|tx\| < C_1 = Cb$.

Его норма очевидно равна

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} Ax = |b|.$$

IV. Пусть $K(t,\tau)$ — непрерывная на квадрате $[a;b]\times[a;b]$ функция двух действительных переменных.[6] Оператор $A:\ C_{[a;b]} \to C_{[a;b]}$ зададим соотношением

$$Ax = \int\limits_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau. \tag{2.2.3}$$

Аддитивность и однородность оператора (2.2.3) очевидны, Для установления его непрерывности заметим, что

$$\|Ax\| = \max_{a\le t\le b}\left|\int\limits_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau\right| \le \|x\|\cdot\max_{a\le t\le b}\int\limits_a^b |K(t,\tau)|d\tau.$$

Интеграл в правой части полученного неравенства непрерывен как функция от переменной t и, следовательно, достигает на отрезке $[a;b]$ наибольшего значения:

$$\max_{a\le t\le b}\int\limits_a^b |K(t,\tau)|d\tau = M,$$

откуда

$$\|Ax\| \le M\cdot\|x\|.$$

[6]Может быть и комплекснозначная.

Оператор A — ограничен, а значит непрерывен.

Простые соображения показывают, что его норма равна M:

$$\|A\| = \max_{a \le t \le b} \int\limits_a^b |K(t,\tau)| d\tau = M.$$

V. Пусть $K(t,\tau)$ — определенная на квадрате $[a;b] \times [a;b]$ функция двух действительных переменных такая. что

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^2 dt d\tau < +\infty.$$

В пространстве $L^2_{[a;b]}$ зададим оператор A тем же соотношением (13), что и выше. Аддитивность и однородность оператора (13) очевидны, а непрерывность следует из ограниченности. Действительно:

$$\|Ax\| = \sqrt{\int\limits_a^b |A(x)|^2 dt} \qquad \Rightarrow \qquad \|A(x)\|^2 = \int\limits_a^b \left| \int\limits_a^b K(t,\tau) x(\tau) d\tau \right|^2 dt.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к внутреннему интегралу, получаем, что

$$\|Ax\|^2 \le \int\limits_a^b \left| \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^2 d\tau \cdot \int\limits_a^b |x(\tau)|^2 d\tau \right| dt = \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^2 dt d\tau \cdot \int\limits_a^b |x(\tau)|^2 d\tau = C^2 \cdot \|x\|^2,$$

где

$$C^2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^2 dt d\tau.$$

Отсюда заключаем, что

$$\|Ax\| \le C \cdot \|x\|,$$

чем и завершается доказательство ограниченности рассматриваемого оператора.

Можно показать, что его норма дается соотношением:

$$\|A\| = \sqrt{\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,\tau)|^2 dt d\tau}.$$

VI. Если $\mathbb{B}_x = \mathbb{B}_y = \mathbb{H}$ – гильбертово пространство, $L \subset \mathbb{H}$ – некоторое нетривиальное подпространство, то, как было установлено выше (раздел 1.4, стр.57-58), пространство $\mathbb{H}$ разлагается в ортогональную прямую сумму L и его ортогонального дополнения: $\mathbb{H} = L \oplus L^\perp$. При этом всякий $x \in \mathbb{H}$ единственным образом представим в виде $x = x_L + x_{L^\perp}$, где $x_L \in L, x_{L^\perp} \in L^\perp$.

Оператор *ортогонального проектирования* на подпространство $Ax = \mathcal{P}_L(x)$ каждому элементу $x \in \mathbb{H}$ ставит в соответствие его проекцию $x_L \in L$: $\mathcal{P}_L(x) = x_L$. Аддитивность и однородность легко устанавливаются. Непрерывность, как и в предыдущих примерах, следует из ограниченности. Действительно, в силу "теоремы Пифагора" $\|x_L\|^2 = \|x\|^2 - \|x_{L\perp}\|^2 \le \|x\|^2$, т.е. $\|\mathcal{P}(x)\| = \|x_L\| \le \|x\|$.

Норма оператора проектирования равна единице:

$$\|\mathcal{P}_L\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{P}_L(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|x_L\| = 1.$$

2.2. Обратный оператор

Пусть $A: \mathbb{B}_x \to \mathbb{B}_y$ – линейный оператор с областью определения $D(A)$ и множеством значением (образом) $\mathrm{Im}A$. Если каждому $y \in \mathrm{Im}A$ отвечает единственный $x \in D(A)$ такой, что $y = Ax$, то говорят, что задан *обратный* оператор с областью определения $\mathrm{Im}A$ и множеством значений $D(A)$. Ясно, что если оператор A осуществляет взаимно однозначное соответствие между $D(A)$ и $\mathrm{Im}A$, то обратный оператор A^{-1} существует.

Понятие обратного оператора тесно связано с разрешимостью операторного уравнения $Ax = y$ относительного элемента $x \in \mathbb{B}_x$ при заданном элементе $y \in \mathbb{B}_y$. Наличие у оператора A обратного обеспечивает однозначную разрешимость этого уравнения для любого $y \in \mathrm{Im}A$.

Однако, если $\mathrm{Im}A \neq \mathbb{B}_y$, то возможно существование $y \in \mathbb{B}_y$, для которых это уравнение решений не имеет.

Например, если оператор $A: \ l^2 \ \Rightarrow \ l^2$ — оператор координатного сдвига:

$$\forall x = \{x_1, x_2, \ldots\} \in l^2 \quad Ax = \{0, x_1, x_2, \ldots\},$$

то уравнение $Ax = \{1, 0, 0, \ldots\}$ не имеет решений.

Обратный оператор обозначается, обычно символом A^{-1} и, как это следует из определения, обладает свойством $\forall y \in \mathrm{Im}A: \ \ A^{-1}y = x \ \Rightarrow A^{-1}Ax = x$. Поскольку последнее справедливо $\forall x \in D(A)$, заключаем, что суперпозиция $A^{-1}A$ – тождественный на $D(A)$ оператор.

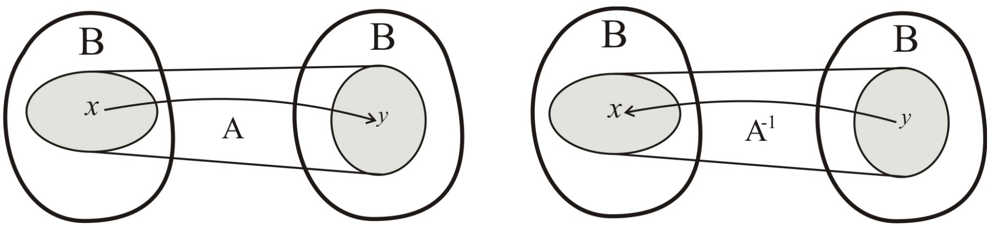

Рис. 2.4. К определению обратного оператора

В то же время, $\forall y \in \mathrm{Im}A: \ A^{-1}y = x \ \Rightarrow \ AA^{-1}y = Ax = y$ означает, что суперпозиция AA^{-1} – тождественный на $\mathrm{Im}A$ оператор. Следует обратить внимание, на то, что, вообще говоря, $A^{-1}A \neq AA^{-1}$, даже если $\mathbb{B}_x = \mathbb{B}_y = \mathbb{B}$.

Везде в дальнейшем мы будем понимать под *обратимым оператором* оператор A, обратный к которому определен на всем пространстве $\mathbb{B}_y$.

Оператор, обратный к линейному, линеен.

◄ Если $Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_2 \Rightarrow A(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$. Поскольку при этом $x_1 = A^{-1}y_1, x_2 = A^{-1}y_2, x_1 + x_2 = A^{-1}(y_1 + y_2)$, то $A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2 = A^{-1}(y_1 + y_2)$, откуда следует аддитивность. Аналогично устанавливается однородность обратного оператора. ►

У оператора A, отображающего область определения $D(A)$ на область значений $\mathrm{Im}A$, *существует обратный тогда и только тогда, когда его ядро тривиально, т.е. состоит только из нулевого элемента.*

◀ Действительно, если у оператора существует обратный, то

$$\forall y \in \mathrm{Im}A \quad \exists! x \in D(A): \; x = A^{-1}y,$$

в частности, из $Ax = 0$ следует, что $x = A^{-1}(0) = 0$.

Пусть теперь ядро оператора A тривиально, но он не обратим на $\mathrm{Im}A$. Значит $\exists \; x_1 \neq x_2$: $A(x_1) = A(x_2)$. Полагая $x = x_1 - x_2 \neq 0$ замечаем, что

$$Ax = A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = 0 \;\Rightarrow\; 0 \neq x \in \mathrm{Ker}A,$$

что противоречит тривиальности ядра.▶

Из вышеизложенного следует, что *необратимость*[7] линейного оператора может быть вызвана двумя причинами:

- наличием $y \in \mathbb{B}_y$, у которого нет прообраза;
- нетривиальностью ядра оператора.

Важно отметить, что оператор, обратный к непрерывному линейному, может и не быть непрерывным.

◀ Пусть $A: \; C_{[0;\frac{\pi}{2}]} \to C_{[0;\frac{\pi}{2}]}$ оператор,задаваемый соотношением

$$Ax = \int\limits_0^t x(t)dt.$$

Легко установить, что оператор A – аддитивен, однороден и непрерывен. В силу непрерывности функций $x(t)$, функции $y(t) = Ax(t)$ – непрерывно дифференцируемы и образ оператора A – это всюду плотное линейное многообразие непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся при $t = 0$ в ноль. Это отображение взаимно однозначно и обратное отображение задается соотношением

$$A^{-1}(y) = \frac{d}{dt}y(t) = x(t).$$

Однако оно не является непрерывным. Если, например, $y_n = \dfrac{\sin nt}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, то $y_n \to 0$ по норме $C_{[0;1]}$, в то время как последовательность производных $A^{-1}(y_n) = \cos nt$ при $n \to +\infty$ предела не имеет. ▶

Удобным критерием непрерывности (ограниченности) оператора, обратного к линейному, является следующий:

оператор $A: \; \mathbb{B}_x \to \mathbb{B}_y$ имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда $\exists C > 0$, постоянная, такая, что $\forall x \in \mathbb{B}_x$ выполняется неравенство

$$\|Ax\| \geq C\|x\|. \tag{2.2.4}$$

[7] Т.е., отсутствие обратного, определенного на всем пространстве $\mathbb{B}_y$.

При этом $\|A^{-1}\| = \dfrac{1}{C}$.

◀ Пусть выполняется неравенство (4.1.1), тогда из $\|Ax\| = 0$ следует $\|x\| = 0$, и, значит, ядро оператора A тривиально, что влечет существование оператора A^{-1}, обратного к A. Если $y \in \mathbb{B}_y$ и $x = A^{-1}y$, то в силу того же неравенства $\|y\| \geq C\|A^{-1}y\| \ \Rightarrow\ \|A^{-1}y\| \leq \dfrac{1}{C}\|y\|$. Отсюда

$$\|A^{-1}\| = \sup_{\|y\|=1} \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{C} \sup_{\|y\|=1} \|y\| = \frac{1}{C},$$

чем доказательство достаточности заканчивается.

Для доказательства необходимости условия (4.1.1) заметим, что если у оператора A существует ограниченный обратный, то из $x \in \mathbb{B}_x,\ y = Ax$, в силу неравенства (2.2.1) следует, что существует положительная константа M, такая, что

$$\|A^{-1}y\| \leq M\|y\| \Rightarrow \|x\| \leq M\|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \geq \frac{1}{M}\|x\|. \ ▶$$

Обсуждение понятия обратного оператора завершим формулировкой фундаментального утверждения, обычно называемого *теоремой Банаха об обратном операторе* или *теоремой Банаха о гомеоморфизме.*

Если ограниченный линейный оператор A отображает все банахово пространство $\mathbb{B}_x$ на все банахово пространство $\mathbb{B}_y$ взаимнооднозначно, то обратный оператор A^{-1} существует и ограничен.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [5].

2.3. Пространства операторов

Пусть A, B –линейные ограниченные операторы, отображающие линейное нормированое пространство $\mathbb{B}_x$ на линейное нормированое пространство $\mathbb{B}_y$.

Суммой операторов называется оператор, действующий по правилу

$$(A + B)x = Ax + Bx,$$

а *произведением оператора A на число* λ – оператор λA, такой, что $(\lambda A)x = \lambda \cdot Ax$. Легко проверить, что так определенные действия над операторами подчиняются всем требованиям, которые предъявляются к операциям сложения и умножения на число, и задают линейную структуру на совокупности линейных операторов, Тем самым,линейные операторы образуют линейное пространство. Роль нулевого элемента в нем играет оператор $\emptyset$, действующий по правилу $\emptyset x = 0$, а противоположным к оператору A будет оператор $-A = (-1)\cdot A$. Оно обычно обозначается $\mathcal{L}(\mathbb{B}_x, \mathbb{B}_y)$. Если ввести в $\mathcal{L}(\mathbb{B}_x, \mathbb{B}_y)$ норму как норму линейного ограниченного оператора (см. раздел 2.2.1), то это пространство превратится в нормированное,

◀Действительно, все аксиомы нормы выполняются.
1.$\|A\| \geq 0,\ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$;
2. Для $\|x\| = 1:\ \|\lambda A\| = \sup\|\lambda \cdot Ax\| = |\lambda| \cdot \sup\|Ax\| = |\lambda| \cdot \|A\|$;
3. Для $\|x\| = 1:\ \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \sup\|Ax\| + \sup\|Bx\| \leq \|A\| + \|B\|$. ▶

Важно, что *если пространство $\mathbb{B}_y$ — полно*[8]*, то и пространство линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{B}_x, \mathbb{B}_y)$ также полно* и, следовательно, является банаховым пространством.

2.4. Алгебра линейных операторов. Коммутатор

Будем считать в дальнейшем, что

$$\mathbb{B}_x = \mathbb{B}_y = \mathbb{B},$$

так что $\mathcal{L}(\mathbb{B}_x, \mathbb{B}_y) = \mathcal{L}(\mathbb{B})$ пространство линейных операторов в $\mathbb{B}$.

В векторном пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ линейных ограниченных операторов, дополнительно к линейной структутре (т.е., возможности сложения операторов и умножения их на число), определена еще и процедура *умножения* операторов AB, понимаемая как суперпозиция $AB = A \circ B$.

Умножение подчиняется условиям:

- *ассоциативности:*

$$A(BC) = (AB)C = ABC,$$

- *правой и левой дистрибутивности:*

$$(A + B)C = AC + BC, \qquad A(B + C) = AB + AC,$$

- *а также условию перестановочности с умножением на число:*

$$(\lambda \cdot A)B = A(\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (AB).$$

Если I тождественный в $\mathbb{B}$ оператор, т.е. такой, что $\forall x \in \mathbb{B}:\ Ix = x$, то выполняется

$$IA = AI = A \qquad \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{B}).$$

т.е. I играет роль единицы относительно так определенного умножения.

Наличие в $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ умножения с перечисленными свойствами превращает его в *некоммутативную ассоциативную нормированную алгебру с единицей.*

Легко установить справедливость неравенства:

$$\forall A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{B}): \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

[8] Пространство $\mathbb{B}_x$ при этом полным может и не быть

Функции от операторов. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{B})$ – оператор. Умножение в $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ позволяет рассматривать целые неотрицательные степени оператора A и, тем самым, делает осмысленным рассмотрение произвольных многочленов от оператора A:

$$R(A) = p_0 I + p_1 A + p_2 A^2 + \cdots + p_n A^n.$$

Функция $R(A)$ называется *операторным многочленом.* Отметим некоторые очевидные свойства операторных многочленов:

- *Если* $R(t) = \alpha R_1(t) + \beta R_2(t)$, *то* $R(A) = \alpha R_1(A) + \beta R_2(A)$.
- *Если* $R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t)$, *то* $R(A) = R_1(A) \cdot R_2(A)$.
- *Если оператор* A *коммутирует с оператором* B, *то любой операторный многочлен* $R(A)$ *также коммутирует с оператором* B: $R(A)B = BR(A)$.
- *Справедливо неравенство:*

$$\|R(A)\| \leq \sum_{s=0}^{n} |p_s| \|A\|^s.$$

Если $f(t)$ целая аналитическая функция, разлагающаяся в ряд

$$f(t) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \cdots + f_m t^m + \cdots ,$$

то операторная функция $f(A)$ может быть определена с помощью соотношения:

$$f(A) = f_0 I + f_1 A + f_2 A^2 + \cdots + f_m A^m + \cdots$$

при этом, если A – линейный (т.е. аддитивный, однородный и ограниченный) оператор, то и $f(A)$ аддитивный, однородный и ограниченный оператор.

Пусть теперь $f(t)$ — непрерывная на некотором отрезке $t \in [a; b]$ функция. В силу аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, существует последовательность многочленов $R_1(t), \ldots, R_m(t), \ldots$, равномерно сходящаяся к функции $f(t)$:

$$R_m(t) \rightrightarrows f(t), \; t \in [a; b].$$

Рассмотрим операторные многочлены $R_m(A)$ в $\mathcal{L}(\mathbb{B})$.

Естественно в этом случае определить $f(A)$ как предел последовательности многочленов $R_m(A)$ в $\mathcal{L}(\mathbb{B})$. Если последовательность операторных многочленов $R_m(A)$ сходится[9] в $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ к некоторому оператору $f(A)$:

$$\lim_{m\to\infty} R_m(A) = f(A),$$

то его мы назовем *операторной функцией.*

Часто используемой в квантовой механике операторной функцией является операторная экспонента $f(A) = e^A$, задаваемая рядом:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots ,$$

либо, что эквивалентно, пределом последовательности операторных многочленов:

$$e^A = \lim_{n\to\infty}(I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!}).$$

Операторный ряд для экспоненты сходится для любого ограниченного оператора A.

◀ Заметим, что числовой ряд

$$e^{\|A\|} = 1 + \|A\| + \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \cdots + \frac{\|A\|^n}{n!} + \cdots$$

сходится для любого значения $\|A\|$. Следовательно, для него выполняется критерий Коши: $\sum\limits_{s=m}^{n} \frac{\|A\|^s}{s!} \to 0,\ m, n \to +\infty$. В силу неравенства :

$$\left\|\frac{A^m}{m!} + \cdots + \frac{A^n}{n!}\right\| \le \sum_{s=m}^{n} \frac{\|A\|^s}{s!}$$

выполнен критерий Коши для ряда, задающего операторную экспоненту, откуда следует его сходимость. ▶

Очевидно, операторная экспонента обладает следующими свойствами:

- $e^{\varnothing} = I$.
- $e^{\lambda I} = e^{\lambda} \cdot I$.
- $\dfrac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A$.

Следует отметить, что, если операторы A и B не коммутативны ($AB \ne BA$), то $e^A \cdot e^B \ne e^B \cdot e^A$ и, следовательно, не выполняется основное свойство скалярной экспоненты: $e^A \cdot e^B \ne e^{A+B}$.

[9] Заметим, что в произвольном банаховом пространстве так будет не всегда. Но, для некоторых специальных классов операторов в гильбертовом пространстве операторные многочлены будут сходиться.

Коммутатор операторов. Важным примером функции двух операторных переменных является *коммутатор операторов*[10], для любых двух операторов $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{B})$ задаваемый соотношением

$$[A, B] = AB - BA.$$

Легко видеть, что $[A, B]$ — линейный оператор.

Отметим некоторые свойства коммутаторов.

- $[A, B] = 0 \Leftrightarrow AB = BA$. *В частности,* $\forall m, n \in \mathbb{N}: \ [A^m, A^n] = 0$.
- *Антикоммутативность:* $[A, B] = -[B, A]$.
- *Дистрибутивность:* $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$.
- *Правило Лейбница:* $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.
- *Тождество Якоби*[11] $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$.

Коммутатор может служить мерилом некоммутативности операторов[12].

Наряду с коммутатором в приложениях часто используют и т.н. *антикоммутатор*, задаваемый соотношением

$$[A, B]_+ = AB + BA.$$

2.3. Линейные функционалы и сопряженные пространства

Напомним, что в случае отображения $f : \mathbb{B}_x \to \mathbb{C}$ (или $f : \mathbb{B}_x \to \mathbb{R}$), оно называется *функционалом* (комплексным или действительным, соответственно).

В соответствии с общими определениями, данными выше, функционал называется *линейным*, если выполнены требования 1-3 предыдущего раздела:

[10] В квантовой механике *коммутатор* иногда называют *квантовой скобкой Пуассона*

[11] Карл Густав Якоби, известный математик и механик, младший брат Морица Германа Якоби, физика, академика российской академии наук, более известного в России как Борис Семёнович Якоби.

[12] Если квантовые наблюдаемые одновременно измеримы, то операторы, им отвечающие, коммутируют. Некоммутирующие операторы соответствуют наблюдаемым, не имеющим одновременно определённого значения. Типичный пример — операторы компоненты импульса и одноименной координаты (соотношение неопределённостей).

1. область определения $D(f)$ функционала f замкнута относительно линейных операций[13] *в $\mathbb{B}_x$;*

2. функционал f обладает свойством однородности:

$$\forall x \in D(f), \lambda \in \mathbb{C}: \ f(\lambda x) = \lambda f(x);$$

3. функционал f обладает свойством аддитивности:

$$\forall x, y \in D(f) \ f(x+y) = f(x) + f(y);$$

В отличие от случая произвольных операторов, в определение *линейного функционала* добавляют требование его непрерывности в нуле, т.е. линейным функционалом называют, обычно аддитивный, однородный и непрерывный в нуле функционал.

Линейные функционалы обладают всеми, установленными выше, свойствами линейных операторов:

1. если функционал непрерывен в нуле, то он непрерывен в любой точке области определения;

2. функционал непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен;

3. ограниченность функционала эквивалентна существованию постоянной $C > 0$ такой, что имеет место аналог неравенства (2.2.1)*:*

$$\forall x \in \mathbb{B}_x: \quad |f(x)| \leq C \cdot \|x\|. \tag{2.3.1}$$

Наименьшая из постоянных, удовлетворяющих неравенству (2.3.1) *называется нормой функционала, обозначается $\|f\|$ и* (2.3.1) *можно записать в виде $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$.*

4. Норма функционала может быть найдена из соотношений

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

5. Если функционал задан на всюду плотном в $\mathbb{B}_x$ линейном многообразии $D(f)$, то он может быть единственным образом расширен на все пространство $\mathbb{B}_x$ с сохранением нормы.

Последнее утверждение допускает обобщение на случай функционалов, определенных на линейных многообразиях, не обязательно плотных в $\mathbb{B}_x$. Это обобщение носит название *теоремы Банаха-Хана*:

[13] Но, может быть, не является замкнутой относительно предельного перехода.

Пусть $f(x)$ – линейный функционал, определенный на некотором линейном многоообразии $D(f) \subset \mathbb{B}_x$. Тогда существует[14] *линейный функционал $\hat{f}$, определенный на всем пространстве $\mathbb{B}_x$ и такой, что*

$$\forall x \in D(f): \quad \hat{f}(x) = f(x), \quad \|\hat{f}\|_{\mathbb{B}_x} = \|f\|_{D(f)}.$$

Из этой теоремы следует, что *в любом линейном нормированном пространстве существует линейный функционал, не являющийся тождественно нулевым.*

◀ Действительно, если $x_0 \neq 0$ – произвольный ненулевой элемент пространства $\mathbb{B}_x$, $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексное число, то совокупность элементов $x \in \mathbb{B} : x = \lambda x_0$ замкнута относительно линейных операций. Определим на этом множестве функционал соотношением $f(x) = f(\lambda x_0) = \lambda \cdot \|x_0\|$. Легко установить, что это – линейный функционал и $f(x_0) = \|x_0\|$, $\|f\| = 1$. Его расширение на все пространство – ненулевой функционал. ▶

Отсюда — пространство линейных функционалов $\mathcal{L}(\mathbb{B}_x, \mathbb{C})$ нетривиально – помимо нулевого функционала в нем есть и ненулевые.

Это пространство называется *сопряженным к пространству* $\mathbb{B}_x$ и обозначают $\mathbb{B}_x^*$. Поскольку пространство $\mathbb{C}$ – полное, сопряженное $\mathbb{B}_x^*$ также полное, даже если $\mathbb{B}_x$ полным не является.

Примеры

1. Пусть $\mathbb{B}_x = \mathbb{C}^n$, $f = \{f_i\}_1^n$ – фиксированный ненулевой вектор из $\mathbb{C}^n$. Функционал F, задаваемый соотношением

$$F(x) = \overline{f}_1 x_1 + \overline{f}_2 x_2 + \cdots + \overline{f}_n x_n = \langle f|x \rangle,$$

как легко проверить, линеен и его норма равна $\|f\|_{\mathbb{C}^n}$.

2. Аналогично, в случае произвольного гильбертова пространства $\mathbb{H}$, функционал

$$F(x) = \overline{f}_1 x_1 + \overline{f}_2 x_2 + \cdots + \overline{f}_n x_n + \cdots = \langle f|x \rangle,$$

определяемый $\forall x \in \mathbb{H}$ некоторым ненулевым элементом $f = \{f_i\}_1^\infty \in \mathbb{H}$, линеен и его норма дается равенством $\|F\| = \|f\|_{\mathbb{H}}$.

3. В пространстве $C_{[a;b]}$ соотношение

$$f(x) = \int\limits_a^b \gamma(t) x(t) dt$$

задает линейный функционал с нормой $\|f\| = \int\limits_a^b |\gamma(t)| dt$.

4. Важную роль в квантовой механике играет функционал в $C_{[a;b]}$, ставящий в соответствие каждой непрерывной функции её значение в точке t_0 отрезка $[a;b]$:

$$f(x) = x(t_0).$$

[14] Вообще говоря, не единственный.

Легко убедиться что это линейный функционал с нормой, равной единице. Он называется *функционалом Дирака.*

2.4. Дельта-функция Дирака

С функционалом Дирака связан любопытный объект, называемый *дельта-функцией Дирака.* Несмотря на то, что в обиходе физиков и инженеров он называется "функцией" , функцией он (этот объект), конечно, не является, т.к. обладает странными свойствами, которыми никакая функция обладать не может: в каждой точке числовой прямой, кроме начала координат, этот объект принимает нулевое значение, в начале координат – бесконечное, и интеграл от этого объекта по любой окрестности нуля должен быть равен единице.

Современная математика легко может объяснить, как следует понимать, что собой представляют объекты, типа дельта-функции Дирака (например [11]). Мы же здесь попробуем достаточно популярно объяснить неискушенному читателю из каких соображений такие объекты возникают.

Пусть $\varphi(t)$ произвольная неотрицательная[15] функция, определенная на всей числовой прямой и такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 1.$$

Для любого натурального n – положим $\varphi_n(t) = n \cdot \varphi(nt)$. Каждая из функций $\varphi_n(t)$ удовлетворяет тому же интегральному тождеству.

Последовательность $\varphi_n(t)$ называется *дельта-образной.*

Заметим, что, по определению, с ростом n члены дельта-образных последовательностей сжимаются к оси ординат, так, что значительная часть охватываемой этими функциями площади сосредоточивается в малой окрестности нуля. Точнее, если $U_0 = (-\delta, +\delta)$ — произвольная окрестность нуля, то для функций $\varphi_n(t)$ справедливо предельное соотношение:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{U_0} \varphi_n(t)dt = 1. \qquad (*)$$

Примером дельта-образной последовательности $\varphi_n(t)$ может служить последовательность, порожденная функцией Гаусса:

[15]Условие неотрицательности можно снять. Мы здесь приняли это ограничение, чтобы упростить дальнейшие выкладки.

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_n(t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-(tn)^2/2}.$$

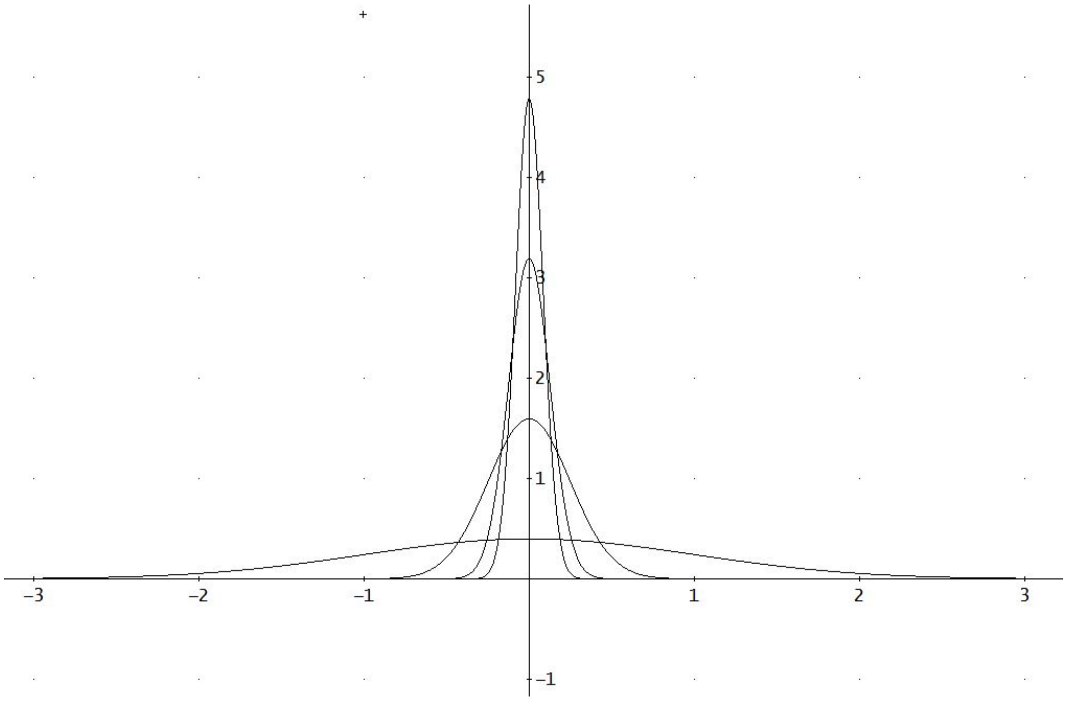

Рис. 2.5. Функции $\varphi_n(t)$, $n = 1, 4, 8, 12$

Зафиксируем точку $a \leq t_0 \leq b$ и рассмотрим интегральный функционал (см. пример 3 предыдущего раздела), взяв в качестве ядра $\gamma(t)$ функцию $\varphi_n(t - t_0)$.

Тем самым, при фиксированном значении n, соотношение

$$f_n(x) = \int_a^b \varphi_n(t - t_0) x(t) dt$$

задает в пространстве $C_{[a;b]}$ линейный функционал с нормой

$$\|f_n\| = \int_a^b \varphi_n(t - t_0) dt \leq 1.$$

Какую бы функцию $x(t) \in C_{[a;b]}$ мы ни взяли, числовая последовательность $f_n(x)$ сходится к значению этой функции в точке t_0 независимо от выбора функции $\varphi(t)$.

◀ Действительно, рассмотрим

$$|f_n(x) - x(t_0)| = \left| \int_a^b \varphi_n(t - t_0) x(t) dt - x(t_0) \right| \leq \left| \int_a^b \varphi_n(t - t_0)(x(t) - x(t_0)) dt \right|.$$

Взяв некоторое, достаточно малое, δ, разобъем интеграл, стоящий под знаком модуля, на сумму двух интегралов – по окрестности U_{t_0} точки t_0 : $U_{t_0} = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ и по дополнению $\overline{U}_{t_0}$ к этой окрестности на отрезке $[a; b]$, придем к неравенству:

$$\left|\int\limits_a^b \varphi_n(t-t_0)(x(t)-x(t_0))dt\right| \le \int\limits_{U_{t_0}} \varphi_n(t-t_0)|x(t)-x(t_0)|dt + \int\limits_{\overline{U}_{t_0}} \varphi_n(t-t_0)|x(t)-x(t_0)|dt.$$

Поскольку функция $x(t)$ – непрерывна на $[a; b]$, то для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать δ, такое что $|x(t) - x(t_0)| < \varepsilon \ \forall t \in U_{t_0}$. В то же время, в силу предельного соотношения (*), существует N_0 такое, что для всех $n > N_0$ выполняется

$$\int\limits_{U_{t_0}} \varphi_n(t-t_0)dt \ge (1-\varepsilon),$$

и, т.о., первое слагаемое пренебрежимо мало при таком выборе δ при $n \to +\infty$.

Во втором слагаемом, в силу той же непрерывности $|x(t) - x(t_0)| < 2\max\limits_{[a;b]}|x(t)| \ \forall t \in \overline{U}_{t_0}$ и справедлива оценка:

$$\int\limits_{\overline{U}_{t_0}} \varphi_n(t-t_0)|x(t)-x(t_0)|dt \le 2\max_{[a;b]}|x(t)| \int\limits_{\overline{U}_{t_0}} \varphi_n(t-t_0)dt \le 2\max_{[a;b]}|x(t)| \cdot \varepsilon.$$

Последнее выполняется в силу соотношения (*) для достаточно больших значений n.

Следовательно, и второе слагаемое неограниченно убывает с ростом n, чем доказательство и завершается. ▶

Тем самым, соотношением

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(t-t_0)x(t)dt = x(t_0)$$

определен линейный функционал, который совпадает с функционалом Дирака. Естественно записывать его в форме интегрального функционала

$$f(x) = \int\limits_a^b \delta(t-t_0)x(t)dt = x(t_0),$$

где символ $\delta(t)$ — ядро этого функционала — и есть объект, который физики и инженеры называют дельта-функцией Дирака. Условно, его можно представлять себе, как элемент δ-образной последовательности с большим номером: $\delta(t) \sim \varphi_n(t), \ n >> 1$.

Перечислим несколько важнейших свойств так понимаемой δ-функции.

- *Дельта-функция принимает нулевое значение во всех точках числовой прямой, кроме точки $t = 0$, в любой окрестности которой она неограниченно возрастает.*

- *Дельта-функция нормированна:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{U_0} \delta(t)dt = 1,$$

здесь U_0 – произвольная окрестность нуля.

- *Дельта-функция обладает т.н. фильтрующим свойством:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)x(t)dt = \int_{U_0} \delta(t)x(t)dt = x(0)$$

или, что то же

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)x(t)dt = \int_{U_{t_0}} \delta(t-t_0)x(t)dt = x(t_0).$$

- *Рассмотрим функцию, задаваемую соотношением*

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Её можно рассматривать как "первообразную" дельта-функции. Символически это записывается так: $H'(t) = \delta(t)$.

- *Для дельта-функции можно определить операцию дифференцирования, понимая производную $\delta'(t)$ как ядро функционала, действующего по правилу*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)x(t)dt = -x'(0).$$

◀ Легко понять, как получается такое правило[16]. Если выбрать в качестве $\varphi(t)$ дифференцируемую функцию (например, гауссиану, см. рис.2.6) то можно определить линейный функционал:

$$f_n(x) = \int_a^b \varphi_n'(t-t_0)x(t)dt.$$

[16]Идея прозрачна — если дельта-функция это ядро линейного функционала, порожденного δ-образной последовательностью, то её производная – ядро линейного функционала, порожденного производными членов этой последовательности, так что, как и выше, можно записать символическое равенство $\delta'(t) \sim \varphi_n'(t)$.

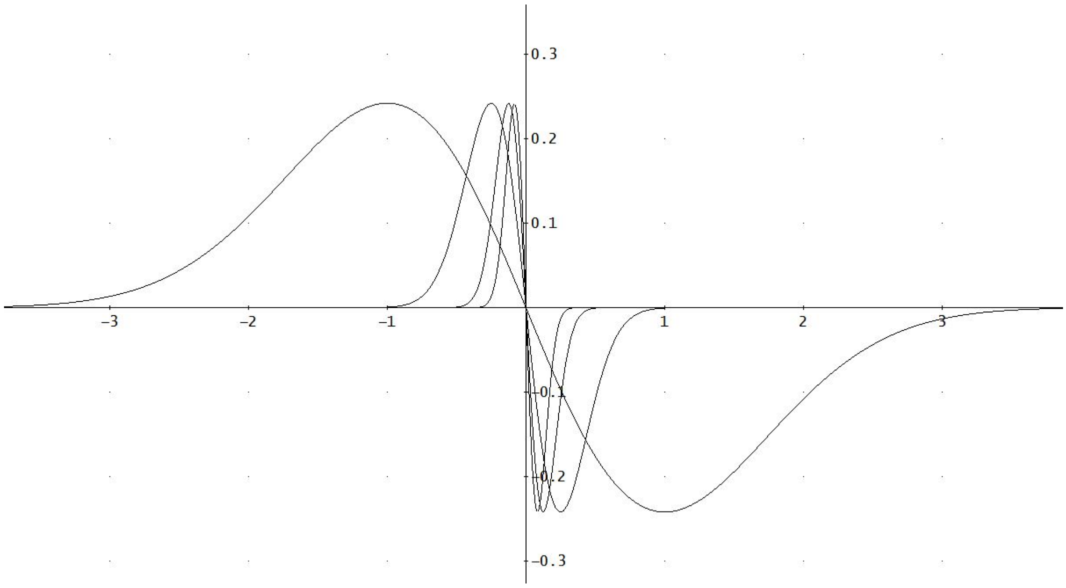

Рис. 2.6. Функции $\varphi_n'(t),\ n = 1, 4, 8, 12$

Интегрируя в последнем интеграле по частям и переходя к пределу при $n \to +\infty$, приходим к равенству:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -\int\limits_a^b \varphi_n(t-t_0)x'(t)dt = -x'(t_0). \blacktriangleright$$

- *Рассуждая аналогично, убеждаемся, что δ-функция в этом смысле бесконечно дифференцируема и $\forall n \geq 1$ справедливы обычные соотношения между старшими и младшими производными. В символической форме:*

$$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\delta(t)\right)$$

и в интегральной форме:

$$\int\limits_{U_0} \delta^{(n)}(t)x(t)dt = -\int\limits_{U_0}\left(\delta^{(n-1)}(t)\right)' x(t)dt,$$

Из последнего легко получаем правило n-кратного дифференцирования δ-функции

$$\int\limits_{U_0} \delta^{(n)}(t)x(t)dt = (-1)^n\, x^{(n)}(t)\Big|_{t=0}.$$

.

В заключение приведем еще несколько символических выражений, содержащих дельта-функцию и её производную.

- $\delta(t) = |\lambda|\delta(\lambda t)$.
- $t \cdot \delta'(t) = -\delta(t)$.
- $x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t)$.

◄ Покажем, например, как следует понимать равенство $t \cdot \delta'(t) = -\delta(t)$ и, одновременно, установим его справедливость Умножая обе части этого соотношения на функцию $x(t)$ и интегрируя по любому промежутку U, содержащему начало координат, получим:

$$\int\limits_U t \cdot \delta'(t)x(t)dt = \int\limits_U \delta'(t)[tx(t)]dt = -[tx(t)]'_{t=0} = -x(0) = -\int\limits_U \delta(t)x(t)dt \ ►$$

Еще раз подчеркнем, что приведенные соотношения имеют смысл только в интегральных соотношениях и условно осмысленны вне них.

2.5. Сопряженный оператор

Пусть $A: \ \mathbb{B}_x \to \mathbb{B}_y$ — линейный оператор, $\mathbb{B}_x^*$, $\mathbb{B}_y^*$, пространства, сопряженные к $\mathbb{B}_x$ и $\mathbb{B}_y$, соответственно.

Если F — функционал из $\mathbb{B}_y^*$, то, как легко установить, соотношение $f(x) = F(Ax)$ определяет линейный функционал $f \in \mathbb{B}_x^*$.

Рассмотрим оператор A^*, отображающий пространство $\mathbb{B}_y^*$, сопряженное к $\mathbb{B}_y$, в пространство $\mathbb{B}_x^*$, сопряженное к $\mathbb{B}_x$, ставя в соответствие каждому функционалу $F \in \mathbb{B}_y^*$ функционал $f \in \mathbb{B}_x^*: \ f(x) = F(Ax)$. Так определенный оператор A^*

$$A^*: \ \mathbb{B}_y^* \ \to \ \mathbb{B}_x^*: \quad A^*F = F(Ax) = f \tag{2.5.1}$$

называется *сопряженным* к оператору A. *Если A – линейный ограни-*

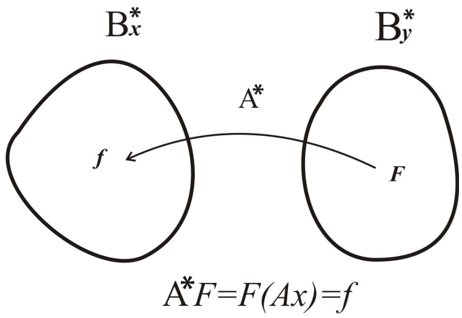

Рис. 2.7. К определению сопряженного оператора.

ченный оператор в $\mathbb{B}_x$, то сопряженный к нему – линейный ограниченный в $\mathbb{B}_y^*$.

◀ Действительно, по определению, $\forall x \in \mathbb{B}_x$ имеет место

$$A^*(\lambda F)(x) = \lambda F(Ax) = \lambda(A^*F)(x) \Rightarrow \ A^*(\lambda F) = \lambda A^*F,$$

и, тем самым A^* – однородный оператор. Аналогично, из цепочки

$$A^*(F+G)(x) = (F+G)(Ax) = F(Ax) + G(Ax) \Rightarrow \ A^*(F+G) = A^*F + A^*G$$

следует аддитивность сопряженного оператора.

Непрерывность сопряженного оператора следует из его ограниченности: если $f \in \mathbb{B}_x^*,\ F \in \mathbb{B}_y^*$, то

$$\forall x \in \mathbb{B}_x: \ |(A^*F)(x)| = |F(Ax)| \le \|F\| \cdot \|Ax\| \le \|F\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

откуда заключаем, что $\|A^*F\| \le \|A\| \cdot \|F\|$, чем доказательстуво ограниченности и завершается.▶

Из последнего неравенства следует, что $\|A^*\| \le \|A\|$. Нетрудно установить, что в действительности *имеет место равенство* $\|A^*\| = \|A\|$.

Из других свойств сопряженных операторов отметим следующие:

1. $(\emptyset)^* = \emptyset,\ I^* = I$;
2. $(A^*)^* = A^{**} = A$;
3. $(A+B)^* = A^* + B^*.$;
4. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;
4. $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.

Необходимо отметить, что если оператор A, аддитивный и однородный, определен не на всем пространстве, а на плотной области определения $D(A) \in \mathbb{B}_x$, то сопряженный к нему будет определен на некотором плотном множестве $D(A^*) \in \mathbb{B}_y^*$ и $\forall F \in \mathbb{B}_y^*$ задается тем же соотношением $(A^*F)(x) = F(Ax)$, но уже *не обязан быть ограниченным.* При этом, свойство 2 может не выполняться. Подробнее об этом можно прочитать в [1].

Глава 3

Операторы и функционалы в гильбертовых пространствах

Наличие скалярного умножения в гильбертовых пространствах позволяет уточнить и упростить описание основных свойств действующих в этих пространствах линейных операторов и функционалов.

3.1. Общий вид линейного функционала

Теорема Ф. Рисса. Оказывается, примеры 1 и 2 (стр.86, раздел 2.3) исчерпывают все возможные конструкции линейных функционалов в гильбертовых пространствах. Точнее, справедливо утверждение, называемое *теоремой Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве*:

Функционал F является линейным ограниченным функционалом в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда найдется единственный элемент $f \in \mathbb{H}$ такой. что $\forall x \in \mathbb{H}$ функционал F задается соотношением

$$F(x) = \langle f|x\rangle. \tag{3.1.1}$$

При этом $\|F\| = \|f\|_{\mathbb{H}}$.

◀ Достаточность очевидна. Пусть теперь F – ненулевой линейный в $\mathbb{H}$ функционал и $\mathrm{Ker}F = \{x \in \mathbb{H} : F(x) = 0\}$ его ядро. Поскольку функционал F – ненулевой, найдется $x_0 \neq 0$, лежащий в ортогональном дополнении к ядру. Для него справедливо $F(x_0) \neq 0$.

Каким бы ни был x — элемент пространства $\mathbb{H}$, вектор $h = F(x)x_0 - F(x_0)x$ принадлежит ядру функционала F:

$$F(h) = F(F(x)x_0 - F(x_0)x) = F(x_0)F(x) - F(x_0)F(x) = 0,$$

а поэтому

$$h \perp x_0 : \ \langle x_0|h\rangle = F(x)\langle x_0|x_0\rangle - \langle F(x_0)x_0|x\rangle = 0.$$

Полагая в последнем равенстве $f = \dfrac{F(x_0)x_0}{\langle x_0|x_0\rangle}$, заключаем, что

$$\forall x \in \mathbb{H}: \; F(x) = \langle f|x\rangle.$$

Тем самым, требуемое представление доказано.

Предполагая, что можно найти два различных элемента $f_1 \neq f_2$ таких, что тождественно выполняется $\langle f_1|x\rangle = \langle f_2|x\rangle$, возьмем в качестве $x = f_1 - f_2$ и рассмотрим

$$\langle f_1|x\rangle - \langle f_2|x\rangle = \langle f_1 - f_2|x\rangle = \langle f_1 - f_2|f_1 - f_2\rangle = \|f_1 - f_2\|^2 = 0,$$

что противоречит предположению $f_1 \neq f_2$.

Поскольку $F(x) = \langle f|x\rangle$, постольку $|F(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, что влечет $\|F\| \leq \|f\|$. В то же время, взяв $x = f$ получаем $F(f) = \|f\|^2$ и, следовательно, $\|F\| = \|f\|_{\mathbb{H}}$, чем доказательство теоремы завершается. ►

Как следствие доказанной теоремы отметим, что

1. всякий линейный функционал в $\mathbb{R}^n$ имеет вид
$$F(x) = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n, \; f = \{f_i\} \in \mathbb{R}^n;$$
2. всякий линейный функционал в $\mathbb{C}^n$ имеет вид
$$F(x) = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n, \; f = \{f_i\} \in \mathbb{C}^n;$$
3. всякий линейный функционал в $L^2_{[a;b]}$ имеет вид
$$F(x) = \int\limits_a^b \overline{f(t)}x(t)dt, \; f \in L^2_{[a;b]};$$
4. всякий линейный функционал в l^2 имеет вид
$$F(x) = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_nx_n + \cdots, \; f = \{f_i\} \in l^2.$$

3.2. Линейные операторы

2.1. Сопряженный оператор

Важным следствием теоремы Ф. Рисса является *самосопряженность гильбертова пространства* – пространство $\mathbb{H}^*$, сопряженное к гильбертову пространству $\mathbb{H}$, с точностью до изоморфизма с ним совпадает и поэтому можно не различать $\mathbb{H}^*$ и $\mathbb{H}$.

◄ Напомним, что сопряженным к $\mathbb{H}$ называется пространство линейных функционалов в $\mathbb{H}$. Соотношение (3.1.1) дает возможность установить взаимнооднозначное соответствие между $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^*$, поставив в соответствие каждому линейному непрерывному функционалу $F \in \mathbb{H}^*$ элемент $f \in \mathbb{H}$, его задающий. Сохранение линейных операций очевидно.►

Оператор A^*, сопряженный к линейному ограниченному $A: \mathbb{B}_x \to \mathbb{B}_y$, отображает пространство, сопряженное к $\mathbb{B}_y$ (т.е. пространство линейных функционалов на $\mathbb{B}_y$) в пространство, сопряженное к $\mathbb{B}_x$ (т.е., в пространство линейных функционалов на $\mathbb{B}_x$) в соответствии с правилом

$$A^*(F) = f: \ f(x) = F(Ax).$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\mathbb{B}_x = \mathbb{B}_y = \mathbb{H}$, то оба сопряженные пространства, в силу сделанного выше замечания, можно отождествить с пространством $\mathbb{H}$.

Пусть $y = Ax$. Рассматривая y как линейный функционал в $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$, заключаем, что функционал $y(Ax)$ тождественнен функционалу $f = (A^*y)(x)$. или, используя теорему Ф. Рисса, что

$$\langle y|Ax\rangle = \langle A^*y|x\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{H}. \tag{3.2.1}$$

Таким образом, в гильбертовом пространстве оператор, сопряженный к оператору A, может быть определен при помощи соотношения (3.2.1) как оператор, который при любых $x, y \in \mathbb{H}$ удовлетворяет этому соотношению.

Если область определения оператора A – $D(A)$ – не все гильбертово пространство, а некоторое плотное в $\mathbb{H}$ линейное множество, то с помощью соотношения (3.2.1) можно установить существование оператора, областью определения которого будет множество тех элементов y пространства $\mathbb{H}$, для каждого из которых существует единственный y^*, удовлетворяющий соотношению $\langle Ax|y\rangle = \langle x|y^*\rangle$ для любого $x \in D(A)$.

Действие этого оператора (мы его также обозначаем A^*) описывается соотношением $A^*y = y^*$.

В отличие от общего случая операторов в банаховых пространствах, операторы A и A^* определены в одном и том же пространстве $\mathbb{H}$, что позволяет рассматривать их суперпозиции и сравнивать действие этих операторов.

Нормальные и самосопряженные операторы. Как отмечено выше, в гильбертовом пространстве определена суперпозиция оператора A и сопряженного к нему A^*. Однако, вообще говоря, $AA^* \neq A^*A$.

Линейный ограниченный оператор A в гильбертовом пространстве называется *нормальным* если выполнено соотношение $AA^* = A^*A$,

Будем называть оператор A *самосопряженным* если $A = A^*$. В комплексных пространствах самосопряженный оператор называется *эрмитовым*.

Для самосопряженного оператора тождественно выполняется

$$\forall x, y \in \mathbb{H}: \ \langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle.$$

В случае, когда область определения оператора A не совпадает со всем $\mathbb{H}$, и оказывается, что $D(A) \neq D(A^*)$, но, для всех $x, y \in D(A) \bigcap D(A^*)$ выполняется $A = A^*$, оператор A^* называется *симметрическим*. Если же при этом $D(A) = D(A^*)$, то для A сохраняется термин *самосопряженный*.

Как уже было отмечено в общем случае выше,

- *тождественный в $\mathbb{H}$ оператор самосопряжен;*
- *сумма самосопряженных операторов – самосопряженный оператор;*
- *произведение самосопряженного оператора на число самосопряжено тогда и только тогда, когда это число действительное.*

Если A и B – произвольные самосопряженные операторы в $\mathbb{H}$, то их суперпозиция может и не быть самосопряженным оператором. .

Действительно, пусть

$$A = A^*, \ B = B^* \ \Rightarrow (AB)^* = B^*A^* = BA.$$

Тогда, если $AB \neq BA$, суперпозиция самосопряженных операторов не самосопряжена

Суперпозиция двух самосопряженных операторов будет самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда они перестановочны.

Положительные операторы. Если оператор A — самосопряжен, то скалярное произведение $\langle Ax|x\rangle$ – действительно, как показывают следующие выкладки.

$$\langle Ax|x\rangle = \langle x|Ax\rangle = \overline{\langle Ax|x\rangle} \ \Rightarrow \ \langle Ax|x\rangle \in \mathbb{R}.$$

Это обстоятельство позволяет выделить из совокупности самосопряженых операторов в гильбертовом пространстве т.н. *положительные* операторы.

Оператор A называется *положительным* (и записывается это обстоятельство обычным неравенством $A > 0$), если

$$\forall x \neq 0, \ x \in \mathbb{H}: \ \langle Ax|x\rangle > 0.$$

Если для некоторых элементов $x \in \mathbb{H}$ допускается нестрогое неравенство, то оператор называется *неотрицательным* и это обстоятельство обозначается $A \geq 0$.

Понятие положительности дает возможность сравнивать самосопряженные операторы, говоря, например, что $A > B$, если оператор $A - B$ – положителен.

Для положительных операторов справедлив аналог неравенства Коши-Буняковского:

$$\text{если } A \geq 0 : \forall x, y \in \mathbb{H} \qquad |\langle Ax|y\rangle|^2 \leq \langle Ax|x\rangle \cdot \langle Ay|y\rangle,$$

который может быть доказан так же, как и неравенство Коши-Буняковского для скалярного произведения.

2.2. Матричное представление линейного оператора

Наличие в гильбертовом пространстве ортонормированного базиса позволяет получить аналог хорошо известного из курса линейной алгебры факта *о матричном представлении линейного оператора.*

Пусть $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство, $\{e_i\}_1^\infty$ – ортонормированный базис в $\mathbb{H}$, A – линейный оператор. Действие оператора A на элемент $x \in \mathbb{H}$ можно представить в виде

$$Ax = A\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i x_i A e_i,$$

где x_i – координаты вектора x в базисе $\{e_i\}$, $Ae_i \in \mathbb{H}$ – образы базисных векторов. Раскладывая образы Ae_i в том же базисе

$$Ae_i = \sum_j m_{ji} e_j$$

и подставляя результат в предыдущее соотношение, получим:

$$Ax = \sum_i x_i \left(\sum_j m_{ji} e_j\right) = \sum_j \left(\sum_j m_{ji} x_i\right) e_j = M_A \cdot x.$$

Отметим, что столбцы матрицы M_A составлены из координат образов Ae_i, x – столбец координат прообраза в том же базисе, а умножение матрицы (вообще говоря, полубесконечной вправо и вниз) на столбец понимается обычным образом.

Говорят, что линейный в $\mathbb{H}$ оператор A *допускает матричное представление*, если существует матрица M_A

$$M_A = (m_{ij}) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots \\ m_{21} & m_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

такая, что действие оператора A на элемент x в некотором ортонормированном базисе описывается умножением матрицы M_A на вектор координат элемента $x = (x_i)_1^\infty$:

$$Ax = M_A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \end{pmatrix}. \tag{3.2.2}$$

При этом элементы матрицы M_A должны удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} m_{ij} x_j \right|^2 < +\infty. \tag{3.2.3}$$

Всякий линейный ограниченный оператор допускает матричное представление.

Можно доказать, что справедливо и обратное утверждение — если условие (3.2.3) выполнено, то оператор A, задаваемый соотношением (3.2.2) – линейный ограниченный в $\mathbb{H}$ оператор.

Если оператор A отображает $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$, то полученное представление (3.2.2) – хорошо известный из курса линейной алгебры факт.

Матрица сопряженного оператора. Если A – линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, M_A – его матрица, а A^* оператор, сопряженный к оператору A, то элементы матрицы сопряженного оператора легко могут быть найдены: $m^*_{ji} = \overline{m}_{ij}$. В матричной форме

$$M_{A^*} = \overline{M}_A^T,$$

где $\overline{M}_A^T$ – матрица, транспонированная и комплексно-сопряженная по отношению к матрице M_A.

◀ Действительно, координаты $(m_{ji})_{j=1}^\infty$ образа вектора e_i находятся из соотношений $m_{ji} = \langle e_j | Ae_i \rangle$, $j = 1, 2, \dots$. Рассмотрим координаты $(m^*_{ji})_{j=1}^\infty$ образа базисного вектора e_i при отображении A^*: $m^*_{ji} = \langle e_j | A^* e_i \rangle$. Используя (3.2.1), заключаем, что

$$m^*_{ji} = \langle e_j | A^* e_i \rangle = \langle Ae_j | e_i \rangle = \overline{\langle e_i | Ae_j \rangle} = \overline{m}_{ij},$$

чем доказательство и завершается.▶

2.3. Ортогональные проекторы

Напомним[1], что любое гильбертово пространство может быть разложено в ортогональную прямую сумму подпространств. Если L – некоторое

[1]Раздел 1.4, пример I, стр.57

собственное подпространство гильбертова пространства $\mathbb{H}$, а $L^\perp$ — его ортогональное дополнение, то всякий элемент $x \in \mathbb{H}$ единственным образом представим в виде

$$x = \mathcal{P}_L x + \mathcal{P}_L^\perp x,\ \mathcal{P}_L x \in L,\ \mathcal{P}_L^\perp x \in L^\perp.$$

Это обстоятельство записывают обычно так: $\mathbb{H} = L \oplus L^\perp$, а элемент $\mathcal{P}_L x$ называется *ортогональной проекцией* элемента x на подпространство L.

Оператор $\mathcal{P}_L : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, ставящий в соответствие каждому $x \in \mathbb{H}$ его проекцию $\mathcal{P}_L x \in L$ называется *оператором ортогонального проектирования* или *ортогональным проектором* на подпространство L.

Отметим некоторые свойства ортогональных проекторов.

1. Ортогональный проектор — линейный в $\mathbb{H}$ оператор.

   ◀ Однородность и аддитивность ортопроектора немедленно следует из единственности разложения $x = \mathcal{P}_L x + \mathcal{P}_L^\perp x$. Для доказательства ограниченности, заметим, что поскольку $\|x\|^2 = \|\mathcal{P}_L x\|^2 + \|\mathcal{P}_L^\perp x\|^2$, постольку $\|\mathcal{P}_L x\| \le \|x\|$ и ортопроектор ограничен.▶

2. $(\mathcal{P}_L)^2 = \mathcal{P}_L \circ \mathcal{P}_L = \mathcal{P}_L$

3. $\|\mathcal{P}_L\| = 1$

   ◀ Следует из $\mathcal{P}_L x = x$, если только $x \in L$, и неравенства $\|\mathcal{P}_L x\| \le \|x\|$.▶

4. Ортопроектор – самосопряженный оператор: $\mathcal{P}_L = \mathcal{P}_L^*$.

   ◀ Пусть x, y – произвольные векторы из $\mathbb{H}$ и

   $$x = \mathcal{P}_L x + \mathcal{P}_L^\perp x, \quad y = \mathcal{P}_L y + \mathcal{P}_L^\perp y.$$

   Рассмотрим $\langle x|\mathcal{P}_L y\rangle = \langle \mathcal{P}_L x|\mathcal{P}_L y\rangle$. Аналогично, $\langle \mathcal{P}_L x|y\rangle = \langle \mathcal{P}_L x|\mathcal{P}_L y\rangle$, откуда заключаем, что

   $$\forall x, y \in \mathbb{H}: \qquad \langle x|\mathcal{P}_L y\rangle = \langle \mathcal{P}_L x|y\rangle,$$

   что и означает самосопряженность оператора $\mathcal{P}_L$. ▶

5. Любой самосопряженный оператор A такой, что $A^2 = A$ является оператором ортогонального проектирования на некоторое подпространство пространства $\mathbb{H}$.

6. Суперпозиция двух ортопроекторов $\mathcal{P}_{L_1} \circ \mathcal{P}_{L_2}$ будет ортопроектором тогда и только тогда, когда эти ортопроекторы коммутируют. При этом их суперпозиция – ортогональный проектор на подпространство $L = L_1 \cap L_2$:

   $$\mathcal{P}_{L_1} \circ \mathcal{P}_{L_2} = \mathcal{P}_{L_1 \cap L_2}.$$

7. Сумма двух ортопроекторов является ортопроектором тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_{L_1} \circ \mathcal{P}_{L_2} = \emptyset$. В этом случае $\mathcal{P}_{L_1} + \mathcal{P}_{L_2} = \mathcal{P}_{L_1 \oplus L_2}$.

   ◀ Доказательство свойств 5 – 7 можно найти, например, в [1]. ▶

Если в качестве базиса в $\mathbb{H}$ выбрать ортонормированный базис $\{e_i^L, e_j^{L^\perp}\}$, составленный из векторов $\{e_i^L\}$, образующих ортонормированный базис в L, и векторов $\{e_j^{L^\perp}\}$, образующих ортонормированный базис в $L^\perp$, то, как легко убедиться, в этом базисе матрица оператора ортогонального проектирования принимает вид:

$$M_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} I_L & \emptyset_{21} \\ \emptyset_{12} & \emptyset_{L^\perp} \end{pmatrix}.$$

Здесь I_L — матрица тождественного в L оператора, $\emptyset_{L^\perp}$ — матрица нулевого оператора в $L^\perp$, $\emptyset_{12}$ и $\emptyset_{21}$ – матрицы нулевых операторов из L_1 в L_2 и из L_2 в L_1, соответственно.

2.4. Изометрические и унитарные операторы

Пусть $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}_2$ — гильбертовы пространства, со скалярными произведениями $\langle\cdot|\cdot\rangle_1$ и $\langle\cdot|\cdot\rangle_2$ соответственно.

Оператор $T: \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ называется *изометрическим*, если он отображает пространство $\mathbb{H}_1$ на все[2] $\mathbb{H}_2$ и сохраняет скалярное произведение, т.е.

$$\forall x, y \in \mathbb{H}_1 : \quad \langle Tx|Ty\rangle_2 = \langle x|y\rangle_1.$$

Если $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_2$. то оператор T называется *унитарным*[3] и обычно обозначается символом U. Если пространство $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_2$ – действительное, то унитарный оператор называется *ортогональным* и обозначается символом $\mathcal{O}$.

Отметим некоторые свойства этого класса операторов.

1. Изометрический (унитарный, ортогональный) оператор обратим.

   ◀ Допустим, что для некоторых $x \neq y$ выполняется $Tx = Ty$ и рассмотрим

$$0 = \langle Tx - Ty|Tx - Ty\rangle_2 = \langle Tx|Tx\rangle_2 - \langle Tx|Ty\rangle_2 - \langle Ty|Tx\rangle_2 + \langle Ty|Ty\rangle_2 =$$

[2] Т.е., $\forall\, y \in \mathbb{H}_2\ \exists\, x \in \mathbb{H}_1 :\ y = Tx$.

[3] Унитарные операторы широко используются в квантовой механике. Состояние квантовой системы описывается вектором в гильбертовом пространстве. Норма вектора состояния — это вероятность для квантовой системы находиться в этом состоянии.

Эволюция квантовой системы во времени описывается оператором, сохраняющим нормы, Этот оператор унитарен. Неунитарные операторы эволюции (или, что то же самое, неэрмитовые гамильтонианы) для изолированной квантовой системы запрещены в квантовой механике.

$$= \langle x|x\rangle_1 - \langle x|y\rangle_1 - \langle y|x\rangle_1 + \langle y|y\rangle_1 = \langle x-y|x-y\rangle_1 = \|x-y\|^2,$$

откуда следует тождественность x и y. Полученное противоречие доказывает существование обратного оператора. ►

2. Оператор, обратный к изометрическому (унитарному, ортогональному) оператору, является изометрическим (унитарным, ортогональным) оператором.

◄ Пусть $Tx = u,\ Ty = v$. Из определения изометричности получаем

$$\langle Tx|Ty\rangle_2 = \langle u|v\rangle_2 = \langle x|y\rangle_1 = \langle T^{-1}u|T^{-1}v\rangle_1.$$

Отсюда $\langle u|v\rangle_2 = \langle T^{-1}u|T^{-1}v\rangle_1$, что и требовалось доказать. ►

3. Изометрический (унитарный, ортогональный) оператор — линейный ограниченный оператор.

◄ Пусть λ – произвольное число. Рассмотрим

$$\langle \lambda Tx|Ty\rangle_2 = \overline{\lambda}\langle Tx|Ty\rangle_2 = \overline{\lambda}\langle x|y\rangle_1 = \langle \lambda x|y\rangle_1 = \langle T(\lambda x)|Ty\rangle_2,$$

откуда

$$\forall x, y:\ \langle \lambda Tx|Ty\rangle_2 = \langle T(\lambda x)|Ty\rangle_2 \quad \Rightarrow \quad T(\lambda x) = \lambda Tx,$$

откуда следует однородность оператора T.

Аналогично, $\forall x, y, z$

$$\langle T(x+y)|z\rangle = \langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle = \langle Tx|Tz\rangle + \langle Ty|Tz\rangle = \langle Tx+Ty|z\rangle \Rightarrow T(x+y) = Tx+Ty$$

чем доказательство аддитивности оператора T завершается.

Ограниченность очевидна из определения, при этом $\|T\| = 1$ ►.

4. Оператор, сопряженный к изометрическому (унитарному, ортогональному) совпадает с обратным: $T^* = T^{-1}$

◄ По определению, сопряженный оператор T^* действует из пространства $\mathbb{H}_2$ в пространство $\mathbb{H}_1$ так, что элементу u (линейному функционалу в $\mathbb{H}_2$) ставится в соответствие элемент T^*u (линейный функционал в $\mathbb{H}_1$) так, что $\forall x \in \mathbb{H}_1$ выполняется

$$\langle T^*u|x\rangle_1 = \langle u|Tx\rangle_2.$$

В силу изометричности оператора T^{-1}, последнее тождество может быть переписано в виде

$$\langle u|Tx\rangle_2 = \langle T^{-1}u|T^{-1}Tx\rangle_1 = \langle T^{-1}u|x\rangle_1,$$

откуда

$$\forall x \in \mathbb{H}_1 \qquad \langle T^*u|x\rangle_1 = \langle T^{-1}u|x\rangle_1$$

что и требовалось доказать. ►

5. Если $A : \ \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ – линейный ограниченный оператор, такой. что образ $\mathbb{H}_1$ все $\mathbb{H}_2$ и

$$\forall x \in \mathbb{H}_1 : \quad \|Ax\|_2 = \|x\|_1,$$

то оператор A — изометрический (унитарный, ортогональный).

◀ Действительно, пусть x, y – некоторые элементы $\mathbb{H}_1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ – произвольное. Положим $z = \lambda x + y$. В силу линейности оператора A, получаем

$$\|A(\lambda x + y)\|_2^2 = \langle A(\lambda x + y)|A(\lambda x + y)\rangle_2 = |\lambda|^2\|Ax\|_2^2 + \overline{\lambda}\langle Ax|Ay\rangle_2 + \lambda\langle Ay|Ax\rangle_2 + \|Ay\|_2^2.$$

В то же время

$$\|\lambda x + y\|_1^2 = \langle \lambda x + y|\lambda x + y\rangle_1 = |\lambda|^2\|x\|_1^2 + \overline{\lambda}\langle x|y\rangle_1 + \lambda\langle y|x\rangle_1 + \|y\|_1^2$$

Поскольку, по условию теоремы, $\|Az\|_2^2 = \|z\|_1^2$, то, сравнивая два последних равенства, заключаем, что для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ тождественно выполняется

$$\overline{\lambda}\langle Ax|Ay\rangle_2 + \lambda\langle Ay|Ax\rangle_2 = \overline{\lambda}\langle x|y\rangle_1 + \lambda\langle y|x\rangle_1.$$

Если в последнем тождестве взять $\lambda \in \mathbb{R}$, то получаем $\mathrm{Re}\langle Ax|Ay\rangle_2 = \mathrm{Re}\langle x|y\rangle_1$, а при λ чисто мнимых из него следует, что $\mathrm{Im}\langle Ax|Ay\rangle_2 = \mathrm{Im}\langle x|y\rangle_1$, откуда следует изометричность оператора A: $\langle Ax|Ay\rangle_2 = \langle x|y\rangle_1$. ▶

6. Если

$$T_2 : \ \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2, \ T_1 : \ \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_3$$

изометричные (унитарные, ортогональные) операторы, то их суперпозиция $T = T_1T_2 : \ \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_3$ также изометрический (унитарный, ортогональный) оператор.

◀ Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{H}_1$, $y_1 = T_2x_1, y_2 = T_2x_2 \in \mathbb{H}_2$, $u_1 = T_1y_1, u_2 = T_1y_2 \in \mathbb{H}_3$, так, что $Tx_1 = u_1, Tx_2 = u_2 \in \mathbb{H}_3$. Тогда, по определению:

$$\langle Tx_1|Tx_2\rangle_3 = \langle T_1T_2x_1|T_1T_2x_2\rangle_3 = \langle T_2x_1|T_2x_2\rangle_2 = \langle x_1|x_2\rangle_1$$

чем доказательство и завершается. ▶

Унитарно эквивалентные операторы. С понятием изометричности (унитарности) связано важное понятие *унитарной эквивалентности*, позволяющее отождествлять формально различные линейные операторы,

Пусть $A : \ \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_1, \quad B : \ \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2$ – линейные операторы, действующие в гильбертовых пространствах $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}_2$ соответственно, T – изометрический оператор из $\mathbb{H}_1$ в $\mathbb{H}_2$.

Операторы A и B называются *унитарно эквивалентными*, если

$$\forall x \in \mathbb{H}_1 : \quad B(Tx) = T(Ax),$$

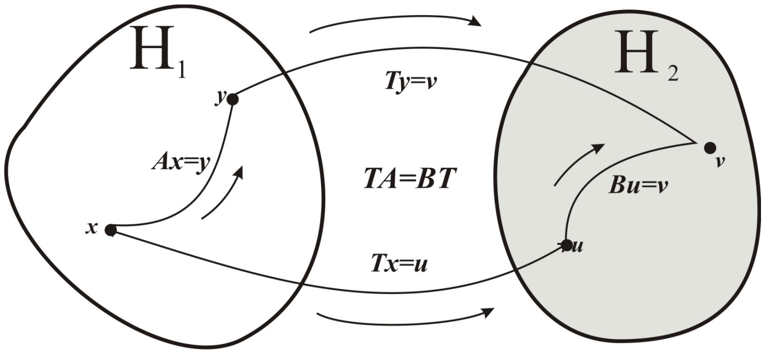

Рис. 3.1. К определению унитарной эквивалентности операторов

Из определения заключаем, что унитарно эквивалентные операторы связаны соотношениями:

$$B = TAT^{-1} = TAT^{*} \;\leftrightarrow\; A = T^{-1}BT = T^{*}BT. \qquad (3.2.4)$$

В частности, пусть $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_2 = \mathbb{H}$, U – унитарный, A – линейный оператор в $\mathbb{H}$. Если оператор U переводит элемент x в x' : $Ux = x'$, а оператор A – элемент x в элемент $y = Ax$, то оператор B, унитарно эквивалентный оператору A, переводит элемент $x' = Ux$ в элемент $y' = Uy$. При этом оператор B, унитарно эквивалентный оператору A, задается соотношением (3.2.4) $B = UAU^{-1} = UAU^{*}$.

Заметим, что *если оператор A – самосопряженный, то и унитарно эквивалентный ему также самосопряжен*, что немедленно следует из соотношений (3.2.4).

Унитарно эквивалентные операторы имеют одинаковое матричное представление.

◄ Изометрический (унитарный) оператор не меняет скалярного произведения и нормы, откуда и следует справедливость сформулированного утверждения.►

Нормы унитарно эквивалентных операторов одинаковы.

◄ Очевидно следует из (3.2.4). ►

Если A и B – операторы в $\mathbb{H}$, а оператор $[A, B]$ – их коммутатор, то справедливо соотношение

$$U[A, B]U^{*} = [UAU^{*}, UBU^{*}].$$

Другими словами, оператор, унитарно эквивалентный коммутатору операторов A и B, совпадает с коммутатором операторов, унитарно эквивалентных операторам A и B

◄ Поскольку $U^{-1} = U^{*} \Rightarrow U^{*}U = UU^{*} = I$, то

$$U[A, B]U^{*} = UABU^{*} - UBAU^{*} = (UAU^{*})(UBU^{*}) - (UBU^{*})(UAU^{*}) = [UBU^{*}, UBU^{*}]. ►$$

2.5. Оператор Фурье – Планшереля

Важным для квантовой механики примером унитарного оператора является оператор Фурье-Планшереля в гильбертовом пространстве $L^2_{[\mathbb{R}]}$.

Пространство $L^2_{[\mathbb{R}]}$. Напомним, что элементами пространства $L^2_{[\mathbb{R}]}$ являются классы функций, которые определены на всей числовой прямой, совпадают почти всюду на $\mathbb{R}$ и интегрируемы с квадратом:

$$\forall x \in L^2_{[\mathbb{R}]} : \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty.$$

Для таких функций определены скалярное умножение

$$\langle x|y\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)} y(t) dt$$

и норма $\|x\|^2 = \langle x|x\rangle$.

Рассмотрим функции $h_m(t),\ m = 0, 1, 2, \ldots$, задаваемые соотношениями

$$h_0 = e^{-\frac{t^2}{2}},\ h_1 = te^{-\frac{t^2}{2}},\ \ldots,\ h_m = t^m e^{-\frac{t^2}{2}}, \ldots\ .$$

Эти функции линейно независимы (следует из линейной независимости системы степеней) и образуют *полную* в $L^2_{[\mathbb{R}]}$ систему[4].

Линейная оболочка системы функций $\{t^m e^{-\frac{t^2}{2}}\}_0^\infty$, которую мы будем обозначать $\mathcal{H}$, образует алгебраическое подпространство, плотное в $L^2_{[\mathbb{R}]}$.

Применим к функциям $h_m(t),\ m = 0, 1, 2, \ldots$, процедуру ортогонализации. Полученный ортонормированный базис обозначим $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots$. Несложные[5] выкладки показывают, что функции $e_m(t)$ даются соотношениями

$$e_m(t) = H_m(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{3.2.5}$$

где

$$H_m(t) = \frac{(-1)^m}{k_m} e^{t^2} \frac{d^m}{dt^m} e^{-t^2},\ k_m^2 = 2^m m! \sqrt{\pi}$$

[4] Доказательство можно найти, например, в [1].

[5] Но достаточно громоздкие, чтобы быть приведенными здесь. Подробнее с ними можно ознакомиться, например, в [2]

ортонормированные с весом $\rho = e^{-t^2}$ многочлены Чебышёва-Эрмита[6]:

$$\langle H_m|H_n\rangle = \int\limits_{=\infty}^{+\infty} \overline{H_m(t)} H_n(t) e^{-t^2} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

Всякая функция $x(t)$ из $\mathcal{H}$ имеет вид:

$$x(t) = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \tag{3.2.6}$$

и её норма дается соотношением

$$\langle x|x\rangle = \|x\|^2 = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Оператор Фурье – Планшереля в $\mathcal{H}$. Определим оператор F на множестве $\mathcal{H}$ соотношением

$$\forall x(t) \in \mathcal{H}: \; y(t) = Fx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau} x(\tau) d\tau. \tag{3.2.7}$$

Очевидно, что так определенный оператор определен на всех элементах $x \in \mathcal{H}$, является однородным и аддитивным. Поэтому

$$y = Fx = x_0 Fe_0 + x_1 Fe_1 + \cdots + x_n Fe_n.$$

Найдем образы Fe_m базисных элементов e_m:

$$◀ \; Fe_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau} H_m(\tau) e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau} \frac{(-1)^m}{k_m} e^{\frac{\tau^2}{2}} \frac{d^m}{d\tau^m} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Интегрируя в последнем интеграле k раз по частям и, учитывая, что на каждом шаге интегрирования внеинтегральный член обращается в ноль, получаем:

$$= \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} \frac{1}{k_m} \frac{d^m}{d\tau^m} e^{\frac{\tau^2}{2} - it\tau} d\tau = \frac{(-1)^m}{k_m\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} \frac{d^m}{d\tau^m} e^{\frac{(\tau - it)^2}{2}} d\tau.$$

Заметив, что

$$\frac{d}{d\tau} e^{\frac{(\tau-it)^2}{2}} = (-i) \cdot \frac{d}{dt} e^{\frac{(\tau-it)^2}{2}},$$

в последнем интеграле вынесем оператор дифференцирования за знак интеграла:

$$Fe_m = \frac{i^m}{k_m\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^m}{dt^m} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} e^{\frac{(\tau-it)^2}{2}} d\tau = \frac{i^m}{k_m\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^m}{dt^m} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2} - \frac{t^2}{2} - it\tau} d\tau.$$

[6]Раздел 1.2.7

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся известным из курса математического анализа тождеством

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Окончательно получаем:

$$Fe_m = \frac{i^m}{k_m}e^{t^2}\frac{d^m}{dt^m}e^{-t^2} = (-i)^m e_m. \blacktriangleright \tag{3.2.8}$$

В силу (3.2.8), действие оператора F на элемент x описывается равенством:

$$y = Fx = x_0e_0 - ix_1e_1 - x_2e_2 - ix_3e_3 + x_4e_4 + \cdots + (i^n)x_ne_n, \tag{3.2.9}$$

из которого, сравнивая с (3.2.6), заключаем:

1. $\forall x \in \mathcal{H}: \quad Fx \in \mathcal{H};$
2. $\forall x \in \mathcal{H}: \quad \|Fx\| = \|x\| \Rightarrow \ \|F\| = 1;$
3. у оператора F существует обратный, который задается соотношением

$$x(t) = F^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau}y(\tau)d\tau. \tag{3.2.10}$$

Расширяя оператор F по непрерывности с сохранением нормы до оператора $\mathcal{F}$, действующего во всем пространстве $L^2_{[\mathbb{R}]}$, приходим к оператору, носящему в литературе название *оператора Фурье–Планшереля.*

Этот оператор унитарен и для функций $x(t) \in L^2_{[\mathbb{R}]}$, которые ещё и абсолютно интегрируемы на всей числовой прямой, он может быть задан соотношением (3.2.7), т.е. является обычным, хорошо известным из курса математического анализа, преобразованием Фурье.

Обратный к $\mathcal{F}$ оператор $\mathcal{F}^{-1}$ на этом классе функций задается соотношением (3.2.10).

Можно показать (например [1]), что оператор Фурье-Планшереля $\mathcal{F}$ и обратный к нему $\mathcal{F}^{-1}$ могут быть заданы $\forall x, x \in L^2_{[\mathbb{R}]}$ соотношениями:

$$\mathcal{F}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-it\tau}-1}{-i\tau}x(\tau)d\tau \qquad \mathcal{F}^{-1}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau}y(\tau)d\tau.$$

2.6. Операторы умножения и дифференцирования в $L^2_{[\mathbb{R}]}$

Оператор умножения на независимую переменную. Рассмотрим в $L^2_{[\mathbb{R}]}$ оператор $\mathcal{M}$, который действуя на элемент $x(t)$, преобразует его в элемент

$\mathcal{M}x = y(t) = t \cdot x(t)$. Этот оператор[7] определен на всех таких элементах x пространства $L^2_{[\mathbb{R}]}$, которые интегрируемы с квадратом вместе с $tx(t)$. Поскольку он заведомо определен для любой функции $x(t) \in \mathcal{H}$[8], то область его определения плотна в $L^2_{[\mathbb{R}]}$. Обозначим её $D(\mathcal{M})$.

Легко проверить, что он, аддитивен и однороден, однако ограниченным не является.

◀ Используя формулу

$$H_m(t) = \frac{(-1)^m}{k_m} e^{t^2} \frac{d^m}{dt^m} e^{-t^2},\ k_m^2 = 2^m m! \sqrt{\pi},$$

задающую многочлены Чебышёва-Эрмита, убеждаемся в справедливости рекуррентного соотношения

$$tH_0 = \frac{H_1}{\sqrt{2}},\ tH_m(t) = \sqrt{\frac{m+1}{2}} H_{m+1}(t) + \sqrt{\frac{m}{2}} H_{m-1}(t), \tag{3.2.11}$$

которое может быть переписано в виде

$$\mathcal{M}e_m = te_m = \sqrt{\frac{m+1}{2}} e_{m+1} + \sqrt{\frac{m}{2}} e_{m-1}(t). \tag{3.2.12}$$

В силу ортонормированности базиса $e_m(t) = H_m(t) e^{-\frac{t^2}{2}}$ заключаем, что

$$\|te_m\|^2 = \frac{m+1}{2} + \frac{m}{2} \quad \Rightarrow \quad \|te_m\| = \sqrt{m + \frac{1}{2}},$$

откуда и следует неограниченность оператора умножения на независимую переменную.▶

Оператор $\mathcal{M}$ — самосопряжен.

◀ Если $\mathcal{M}^*$ – сопряженный оператор, то он действует по правилу: для любого $x \in D(\mathcal{M})$ тождественно выполняется $\langle \mathcal{M}x | y \rangle = \langle x | \mathcal{M}^* y \rangle$.

Пользуясь тем, что $t \in \mathbb{R}$, перепишем это тождество в виде

$$\langle \mathcal{M}x | y \rangle = \langle tx | y \rangle = \langle x | ty \rangle,$$

что означает $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$ и, следовательно, оператор $\mathcal{M}$ – симметрический.

Для завершения доказательства осталось заметить, что $D(\mathcal{M}) = D(\mathcal{M}^*)$, откуда следует самосопряженность.▶

Оператор дифференцирования. Наряду с оператором умножения на независимую переменную, рассмотрим оператор дифференцирования $\mathcal{D}$, действующий по правилу

$$\mathcal{D}x = y(t) = i \frac{d}{dt} x(t).$$

[7] В квантовой механике он называется *оператором координаты.*

[8] Как уже отмечалось выше, $\forall m \geq 0$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ сходится

Оператор дифференцирования[9] определен на всех таких классах функций $x(t)$ из $L^2_{[\mathbb{R}]}$, которые сумммируемы с квадратом и у которых существует суммируемая с квадратом производная $x'(t)$. Как и выше, заметим, что область определения оператора дифференцирования содержит подпространство $\mathcal{H}$. Отсюда – область определения оператора дифференцирования плотна в $L^2_{[\mathbb{R}]}$.

Будем обозначать её $D(\mathcal{D})$.

Область значений оператора $\mathcal{D}$ также содержит это подпространство:

$$\forall x \in \mathcal{H}: \quad i\frac{d}{dt}\left(P_m(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\right) = Q_{m+1}(t)e^{-\frac{t^2}{2}} \in \mathcal{H},$$

здесь $P_m(t), Q_{m+1}(t)$ – многочлены, степени которых равны m и $m+1$, соответственно.

Легко устанавливается, что оператор дифференцирования аддитивен и однороден. Покажем, что он неограничен.

◀ Заметим, что для элементов ортонормированного базиса e_m справедливо тождество

$$\frac{d}{dt}e_m = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot e_{m-1} - \sqrt{\frac{m+1}{2}} \cdot e_{m+1}. \tag{3.2.13}$$

Действительно,

$$(e_m)' = (H_m)'e^{-\frac{t^2}{2}} - tH_m e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}H_m(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{(-1)^m}{k_m}e^{t^2}\frac{d^m}{dt^m}e^{-t^2}\right) = 2tH_m - H_{m+1}\sqrt{2(m+1)},$$

и подставляя в последнее равенство рекуррентное соотношение (3.2.11), приходим к соотношению

$$(H_m)' = \sqrt{2m}H_{m-1}.$$

Теперь осталось воспользоваться тем, что $e_m = H_m e^{-\frac{t^2}{2}}$, откуда и следует справедливость рекуррентной формулы (3.2.13).

Для нормы $\|\mathcal{D}e_m\| = \|i(e_m)'\|$ из (3.2.13) получаем

$$\|\mathcal{D}e_m\| = \sqrt{m + \frac{1}{2}},$$

что свидетельствует о неограниченности оператора дифференцирования.▶

Оператор $\mathcal{D} = i\dfrac{d}{dt}$ *самосопряжен*:

$$\forall x, y \in D(\mathcal{D}) \qquad \langle \mathcal{D}x|y\rangle = \langle x|\mathcal{D}y\rangle.$$

[9]В квантовой механике один из основных операторов — оператор импульса, который задается соотношением $-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$ и только постоянным множителем отличается от оператора дифференцирования

◀ Интегрируя по частям и учитывая, что внеинтегральный член обращается в ноль, получаем:

$$\langle \mathcal{D}x|y\rangle = -i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{x'(t)}y(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)}iy'(t)dt = \langle x|\mathcal{D}y\rangle. \blacktriangleright$$

Операторы $\mathcal{M}$ – умножения на независимую переменную, и $\mathcal{D}$ – дифференцирования доставляют нам пример *унитарно эквивалентных операторов.*

◀ Действительно, пусть $\mathcal{F}: \ L^2_{[\mathbb{R}]} \to L^2_{[\mathbb{R}]}$ – оператор Фурье. Тогда, $\forall x \in \mathcal{H}$ выполняется

$$\mathcal{F}\mathcal{M} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau}\tau \cdot x(\tau)d\tau.$$

В то же время в $\mathcal{H}$

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = i\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau}x(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau}\tau \cdot x(\tau)d\tau = \mathcal{F}\mathcal{M},$$

откуда заключаем, что

$$\forall x \in L^2_{[\mathbb{R}]}: \ \mathcal{F}\mathcal{M} = \mathcal{D}\mathcal{F} \ \Rightarrow \ \mathcal{M} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{F}$$

что и требовалось доказать. ▶

Глава 4

Элементы спектральной теории операторов

4.1. Собственные векторы

Пусть $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство, A оператор в $\mathbb{H}$.

Ненулевой вектор $u \in \mathbb{H}$ называется *собственным вектором* оператора A, если существует число λ, такое, что

$$Au = \lambda u. \tag{4.1.1}$$

Число λ при этом называется *собственным значением* оператора A.

Наличие у оператора собственных векторов означает существование у операторного уравнения (4.1.1) ненулевого решения.

Отметим несколько простых свойств собственных чисел и собственных векторов.

1. Если собственному значению λ отвечает собственный вектор u, то и вектор $v = \mu u$, $\forall \mu \neq 0$ — также собственный, отвечающий тому же собственному значению.

2. У оператора может вовсе не быть собственных векторов.

1.Рассмотрим оператор $\mathcal{M}$ умножения на независимую переменную в $L^2_{[\mathbb{R}]}$. Если x – собственный вектор этого оператора, то для некоторого числа λ тождественно по t должно выполняться

$$\mathcal{M}x = \lambda x \;\Rightarrow\; t \cdot x(t) \equiv \lambda x(t) \; \forall t,$$

что невозможно ни при каком λ в силу $x(t) \neq 0$.

2. Другим примером оператора, у которого отсутствуют собственные векторы, является оператор координатного сдвига в l^2

$$\forall x \in l^2 : \; Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \cdots \\ x_{n-1} \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

Если при некотором λ выполняется $Ax = \lambda x$, то это возможно лишь для $x = 0$,

3. Еще один важный для приложений пример оператора, у которого отсутствуют собственные векторы, дает оператор Вольтерра:

$$\mathcal{V}:\ L^2_{[0;1]} \to L^2_{[0;1]}:\ \forall x\ \mathcal{V}x = \int\limits_0^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

3. Одному и тому же собственному значению может отвечать несколько различных (т.е. линейно независимых) собственных векторов. При этом, любая их линейная комбинация также является собственным вектором оператора с тем же собственным значением.

$$Ax = \lambda x,\ Ay = \lambda y\ \Rightarrow\ A(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y).$$

Совокупность всех собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, пополненная нулевым вектором, образует алгебраическое подпространство в $\mathbb{H}$. Это подпространство называется *собственным* подпространством. Его размерность, конечная или бесконечная, называется *геометрической кратностью*[1] собственного значения.

1. Пусть A – оператор из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, задаваемый соотношением:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы у оператора A существовал собственный вектор, нужно чтобы система линейных уравнений $(A - \lambda I)x = 0$ обладала ненулевым решением, т.е. число λ должно удовлетворять условию $|A - \lambda I| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0\ \Rightarrow\ \lambda = 1.$$

Легко установить, что этому собственному значению отвечают линейно независимые собственные векторы $a = \{0,1,0\}^T$ и $b = \{0,0,1\}^T$ и, тем самым, собственными будут любые векторы $u = \mu a + \nu b,\ \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

Собственное подпространство имеет в данном случае размерность 2, соответственно, *геометрическая* кратность собственного значения $\lambda = 1$ равна 2. В то же время *алгебраическая кратность* этого корня равна 3.

2. Пусть $\mathcal{F}$ – оператор Фурье-Планшереля в $L^2_{[\mathbb{R}]}$, рассмотренный в предыдущем разделе. Из соотношения (24)

$$\mathcal{F}e_m = (-i)^m e_m,$$

[1] В отличие от *алгебраической кратности*

где $e_m = H_m(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$, заключаем, что у этого оператора есть, по-крайней мере, четыре собственных значения — $\lambda = 1, i, -i$ и -1, каждому из которых отвечает бесконечно много собственных векторов:

$$\lambda = 1: \ \mathcal{F}e_{4m} = e_{4m}, \quad \lambda = i: \ \mathcal{F}e_{4m+3} = i \cdot e_{4m+3},$$

$$\lambda = -i, \ \mathcal{F}e_{4m+1} = (-i) \cdot e_{4m+1}, \quad \lambda = -1: \mathcal{F}e_{4m+2} = (-1) \cdot e_{4m+2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Заметим, что $\forall x \in L^2_{[\mathbb{R}]}$

$$\mathcal{F}x(t) = \mathcal{F}^{-1}x(-t) \Rightarrow \mathcal{F}^2 x(t) = x(-t) \Rightarrow \mathcal{F}^4 x(t) = x(t).$$

Если λ, собственное число оператора $\mathcal{F}$, то должно иметь место

$$\mathcal{F}x = \lambda x \Rightarrow \mathcal{F}^4 x = \lambda^4 x = x \Rightarrow \lambda^4 = 1,$$

откуда следует, что упомянутыми выше собственными числами исчерпываются все собственные числа оператора Фурье-Планшереля.

4. Собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям, имеют общим только нулевой элемент пространства $\mathbb{H}$.

В зависимости от свойств оператора, собственное подпространство может быть замкнутым, относительно нормы, порождаемой скалярным произведением, а может и не быть. В конечномерных пространствах собственные подпространства линейного оператора всегда замкнуты.

Инвариантные подпространства.

Пусть L – алгебраическое подпространство пространства $\mathbb{H}$, может быть и незамкнутое метрически. Оно называется *инвариантным подпространством*, если $L \in \mathcal{D}(A)$ и $\forall u \in L: \ Au \in L$.

Широкий класс инвариантных подпространств образуют *собственные* подпространства оператора, отвечающие некоторому собственному значению и их прямые суммы.

Однако, понятие инвариантного подпространства шире — у оператора могут существовать инвариантные подпространства, не связанные с собственными векторами.

Как было замечено выше, у оператора умножения на независимую переменную в $L^2_{[0;1]}$ нет собственных значений, Рассмотрим в $L^2_{[0;1]}$ совокупность функций, обращающихся в ноль почти всюду на промежутке, например, $[0; \frac{1}{3}]$. Ясно, что такие функции образуют подпространство. Легко убедиться в том, что оно инвариантно относительно умножения на независимую переменную.

Пусть L – инвариантное подпространство оператора A, $L^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Будет ли $L^{\perp}$ инвариантным подпространством этого оператора? Оказывается, не обязательно.

1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ действие оператора A – поворот пространства вокруг оси OZ на некоторый угол $0 < \varphi < 2\pi$. Пусть L – множество векторов с нулевыми первой и второй координатами (векторы, коллинеарные оси OZ). Ортогональное дополнение к L – совокупность векторов с нулевой третьей координатой (векторы, компланарные плоскости XOY). Как видно из определения, в этом случае подпространство L и его ортогональное дополнение Ł$^{\perp}$ оба инвариантны относительно оператора A.

2. В пространстве $\mathbb{R}^2$ действие оператора A дается соотношением (рис.4.1.):

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что подпространство L векторов с нулевой второй координатой (т.е. – ось OX)

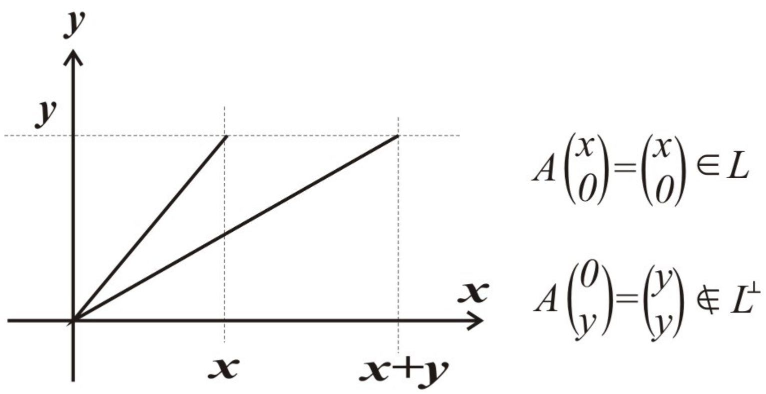

Рис. 4.1. Пример неинвариантности ортогонального дополнения

инвариантно относительно оператора A, в то время как его ортогональное дополнение (ось OY) свойством инвариантности не обладает.

Если L – инвариантное подпространство оператора A, то сужение оператора на подпространство L называется *частью* оператора A в подпространстве L.

Если подпространство L и его ортогональное дополнение $L^{\perp}$ оба являются инвариантными подпространствами оператора A, то, поскольку всякий элемент $x \in \mathbb{H}$ представляется в виде $x = u + v,\ u \in L, v \in L^{\perp}$, действие оператора A на элемент x описывается автономным действием его частей в подпространствах L и $L^{\perp}$. В условно-матричном виде это обстоятельство можно записать так:

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad Ax = \begin{pmatrix} A_L & \varnothing_{LL^{\perp}} \\ \varnothing_{L^{\perp}L} & A_{L^{\perp}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A_L u + A_{L^{\perp}} v.$$

Здесь $A_L, A_{L^\perp}$ — части оператора A в подпространствах L и $L^\perp$, $\emptyset_{LL^\perp}$ и $\emptyset_{L^\perp L}$ – нулевые операторы из L в $L^\perp$ и из $L^\perp$ в L, соответственно.

В этом случае говорят, что подпространство L (или $L^\perp$) *приводит* оператор A. Очевидно, что тривиальные подпространства (т.е. нулевое и само пространство) приводят любой оператор. Если же у оператора A нет нетривиальных приводящих его подпространств, то такой оператор называется *неприводимым.*

Пусть A – линейный оператор, L – подпространство $\mathbb{H}$, $\mathcal{P}_L$ – оператор ортогонального проектирования на подпространство L.

Для приводимости оператора A подпространством L необходимо и достаточно, чтобы операторы A и ортогональный проектор $\mathcal{P}_L$ были перестановочны[2].

4.2. Спектр и резольвента

Пусть A – линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, с плотной в $\mathbb{H}$ областью определения $\mathcal{D}(A)$ и областью значений $\mathrm{Im}(A)$, λ – параметр, который может принимать любые комплексные значения.

Рассмотрим уравнение

$$Ax - \lambda x = y \tag{4.2.1}$$

относительно неизвестного x при заданном значении правой части y. С точки зрения приложений интерес представляет вопрос о разрешимости уравнения (4.2.1) в зависимости от значений параметра λ и правой части y этого уравнения.

Рассматриваемое уравнение — линейное и неоднородное. Заметим, что всякое его решение представляет собой сумму какого-то решения x_O однородного уравнения $Ax_O - \lambda x_O = 0$ и некоторого решения z_y уравнения неоднородного с правой частью y : $x_N = x_O + z_y$.

Точнее, если z_y – любое (фиксированное) решение неоднородного уравнения, x_O – любое решение уравнения однородного, то их сумма – решение неоднородного уравнения, вообще говоря (если $x_O \neq 0$), отличающееся от z_y. Верно и обратное: если x_N – любое из решений неоднородного уравнения, а z_y – какое-то решение неоднородного уравнения, то $x_O = x_N - z_y$ – решение однородного уравнения.

Таким образом, разрешимость уравнения (4.2.1) тесно связана с разрешимостью однородного уравнения $Ax - \lambda x = 0$.

Тут могут реализоваться следующие ситуации.

---

[2] Доказательство можно найти в [1]

- Значение λ таково, что обратный оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ существут, определен всюду в $\mathbb{H}$ (т.е. $\mathrm{Im}(A)=\mathbb{H}$) и ограничен.

  В этом случае оператор $A-\lambda I$ осуществляет взаимно однозначное отображение области определения $\mathcal{D}(A)$ на область значений $\mathbb{H}$, однородное уравнение имеет только нулевое решение и уравнение (4.2.1) имеет единственное решение при любой правой части. Решение этого уравнения дается соотношением $x=(A-\lambda I)^{-1}y$.

  Такие значения параметра λ называются *регулярными*, а оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ – *резольвентой.*

  Резольвента — ограниченный линейный оператор, обычно обозначаемый R_λ.

- Значение λ таково, что однородное уравнение $Ax-\lambda x=0$ имеет только нулевое решение, однако обратный оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ определен не на всем пространстве $\mathbb{H}$. Неоднородное уравнение при этом может вообще не иметь решений для каких-то правых частей.

- Значение λ таково, что однородное уравнение $Ax-\lambda x=0$ имеет ненулевые решения, Тогда λ – собственное число оператора A и если неоднородное уравнение разрешимо, то у него бесконечное множество решений.

  Значения λ, отвечающие двум последним ситуациям составляют спектр *оператора A.*

Т.о. вся комплексная плоскость разбивается на два дополняющих друг-друга множества, первое из которых образуют регулярные значения λ, а второе — спектральные.

Как уже было отмечено выше, собственные значения оператора A (если они, конечно, есть) принадлежат спектру.

Помимо собственных, спектру могут принадлежать и другие значения λ. Для таких чисел λ однородное уравнение имеет лишь нулевое решение, а неоднородное однозначно разрешимо, только если $y\in\mathrm{Im}(A-\lambda I)=\{y: y=(A-\lambda I)x,\ x\in\mathcal{D}(A)\}$ и не имеет решений при других значениях y.

1. Пусть $\mathcal{M}$ — оператор умножения на независимую переменную в гильбертовом пространстве $L^2_{[0;1]}:\ \forall x\ \mathcal{M}x(t)=t\cdot x(t)$. Выше (в предыдущем разделе) мы установили, что у этого оператора нет собственных значений. В то же время оператор $\mathcal{M}-\lambda I$ не обратим для всех действительных значений $0\le\lambda\le1$, которые и образуют спектр этого оператора.

2. Оператор координатного сдвига в l^2 (см. предыдущий раздел), обнуляющий первую координату элемента $x \in l^2$ и переводящий каждую координату с номером k в координату с номером $k+1$, не имеет собственных значений.

Заметим, что при $\lambda \neq 0$ оператор, обратный оператору $A - \lambda I$, определен и ограничен на всем l^2 в силу

$$(A - \lambda I)x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$$

Если же $\lambda = 0$, то $(A - \lambda I)^{-1} = A^{-1}$ не определен для элементов из l^2 таких, что $x_1 \neq 0$. Таким образом, спектр этого оператора состоит из единственного числа $\lambda = 0$.

Отметим некоторые, важные свойства спектров линейных операторов.

Теорема 1. *Спектр ограниченного линейного оператора в комплексном пространстве всегда не пуст.*

Теорема 2. *Спектр ограниченного линейного оператора – замкнутое множество на комплексной плоскости.*

Отсюда следует, что множество регулярных значений λ – открыто.

Теорема 3. *Спектр ограниченного линейного оператора ограничен. Если λ – точка спектра оператора A, то $|\lambda| \leq \|A\|$.*

◀ Поскольку $A - \lambda I = -\lambda \left(I - \dfrac{1}{\lambda}A\right)$, то для резольвенты получаем:

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{\lambda^j}.$$

Последний ряд сходится вне круга $|\lambda| > \|A\|$, и определяет там ограниченный оператор, чем доказательство и заканчивается. ▶

В конечномерном случае спектр всегда состоит только из собственных чисел оператора. Для некоторых классов операторов и в бесконечномерных пространствах это положение остается справедливым (см. ниже).

Если подпространство L приводит оператор A и $A_L, A_{L^\perp}$ – его части, то спектр оператора A является теоретико-множественной суммой спектров операторов A_L и $A_{L^\perp}$.

Для любых двух регулярных значений λ_1 и λ_2 имеет место *равенство Гильберта*:

$$R_{\lambda_1} - R_{\lambda_2} = (\lambda_1 - \lambda_2)R_{\lambda_1}R_{\lambda_2}.$$

◀ Действительно, в силу регулярности $\lambda_i, i = 1, 2$ для любого элемента $x \in \mathbb{H}$ имеем:

$$R_{\lambda_1}x = R_{\lambda_2}(A - \lambda_2 I)R_{\lambda_1}x, \quad R_{\lambda_2}x = R_{\lambda_2}(A - \lambda_1 I)R_{\lambda_1}x,$$

вычитая из второго соотношения первое, получим искомое. ▶

Резольвенты перестановочны при любых регулярных значениях параметра:
$$R_{\lambda_1} \cdot R_{\lambda_2} = R_{\lambda_2} \cdot R_{\lambda_1},$$
что немедленно следует из равенства Гильберта.

4.3. Вполне непрерывные операторы

Линейный оператор $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ называется *вполне-непрерывным*, если любое ограниченное множество в $\mathbb{H}$ он переводит в компактное.

Всякий оператор, действующий в конечномерном пространстве – вполне непрерывен.

Вполне непрерывными являются и операторы ортогонального проектирования на конечномерные подпространство.

Другие важные для приложений вполне непрерывные операторы — интегральные операторы в пространстве $L^2_{[a;b]}$, задаваемые соотношением

$$Ax = \int\limits_a^b K(t,\tau)x(\tau)d\tau, \text{ где } \iint\limits_{[a;b]\times[a;b]} |K(t,\tau)|^2 dtd\tau < +\infty.$$

Они носят название операторов Гильберта – Шмидта.

Любой вполне непрерывный оператор – непрерывен.

Однако, непрерывный оператор свойством *полной непрерывности* может и не обладать.

Тождественный оператор I, действующий в гильбертовом пространстве по правилу

$$\forall x \in \mathbb{H} : \ Ix = x$$

непрерывен, однако вполне непрерывным не является, т.к. переводит единичный шар в себя, а единичный шар в бесконечномерном пространстве $\mathbb{H}$ не компактен[3].

Можно доказать, что тождественный оператор вполне-непрерывен тогда и только тогда, когда пространство конечномерно.

Отметим еще несколько простых свойств, которыми обладают вполне непрерывные операторы:

1. *Если A вполне непрерывен, а B непрерывен, то обе суперпозиции AB и BA — вполне непрерывны.*

[3]Раздел 1.2.2, стр. 24

2. *У вполне непрерывного оператора A не существует ограниченный обратный.*

   ◀ *Если предположить противное, то (свойство 1) оператор $I = AA^{-1}$ должен быть вполне непрерывным, а это, как мы установили, не так.* ▶

3. *Если A и B вполне непрерывны, то и $\alpha A + \beta B$ — вполне непрерывен.*

4. *Оператор A вполне непрерывен, тогда и только тогда, когда сопряженный A^* — вполне непрерывен.(Теорема Шаудера.)*

Вполне непрерывные операторы "почти конечномерны". Точнее, какое бы малое число $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, существуют линейные операторы A_ε и R_ε^A, такие, что действие оператора A на элемент x представимо в виде[4]:

$$Ax = A_\varepsilon x + R_\varepsilon^A x,$$

где A_ε — оператор, отображающий $\mathbb{H}$ в некоторое конечномерное подпространство, размерность которого определяется величиной ε, а $\|R_\varepsilon^A\| < \varepsilon$.

3.1. Спектр вполне непрерывного оператора. Разложение вполне непрерывных операторов

Эффективным аппаратом изучения линейных, (в том числе вполне непрерывных) операторов является разложение их действия на сумму действий операторов более простой структуры, например, имеющих меньшую размерность.

Важную роль здесь играет наличие у исследуемого оператора инвариантных подпространств. Если L – инвариантное подпространство оператора A, приводящее его[5], то действие оператора можно разбить на действие его частей.

Наличие у оператора собственного вектора свидетельствует о наличии у него инвариантного подпространства, в котором сужение оператора описывается совсем просто — как умножению вектора на собственное число. Если и ортогональное дополнение к этому подпространству инвариантно, то действие оператора, как было отмечено выше, можно разложить на сумму его частей.

Однако линейный оператор (даже вполне непрерывный) не всегда обладает собственными векторами.

[4] Доказательство, например, в [5] или [3].
[5] Т.е., обладающее инвариантным ортогональным дополнением $L^\perp$.

Например, оператор Вольтерры в $L^2_{[0;1]}$, задаваемый соотношением

$$V(x) = \int\limits_0^t K(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

не имеет собственных векторов.

Что можно сказать о наличии или отсутствии инвариантных подпространств у таких операторов? Ответ на этот вопрос дает теорема Неймана[6]. Оказывается

любой вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве обладает нетривиальным инвариантным подпространством.

Оператор Вольтерры, обладает инвариантными подпространствами L_{t_0}, состоящими из функций, обращающихся в ноль на промежутке от 0 до t_0 для любого значения $0 < t_0 < 1$.

Как было отмечено в конце предыдущего раздела, вполне непрерывные операторы "почти" конечномерны, в том смысле, что с любой степенью точности могут быть заменены конечномерными. Из курса линейной алгебры известно, что спектр конечномерных операторов состоит только из собственных значений. Вполне непрерывные операторы и в этом отношении оказываются похожими на них.

Точнее, имеет место[7] следующее утверждение:

Если A — вполне непрерывен, то каждая, отличная от нуля точка спектра является собственным значением оператора A.

При этом

1. *Вне круга радиуса $r > 0$ на комплексной плоскости лежит не более конечного числа собственных значений вполне непрерывного оператора.*

2. *Каждому ненулевому собственному числу вполне непрерывного оператора отвечает не более конечного числа линейно независимых собственных векторов.*

3. *Единственной предельной точкой собственных чисел вполне непрерывного оператора может быть только точка $\lambda = 0$.*

4. *Всякий вполне непрерывный оператор имеет не более счетного множества линейно независимых собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям.*

[6]Широким обобщением этой теоремы является теорема (1973) Ломоносова В., устанавливающая, что если оператор B перестановочен с вполне непрерывным оператором A, то у B существует нетривиальное инвариантное подпространство

[7]Доказательства можно найти, например, в [1] или [5].

Приведенные выше свойства вполне непрерывных операторов дают возможность разложить любой вполне непрерывный оператор в сумму, по крайней мере, двух вполне непрерывных операторов, один из которых конечномерный:

для любого вполне непрерывного оператора A существует разложение пространства $\mathbb{H}$ в прямую сумму инвариантных относительно оператора A подпространств L и $L^{\perp}$:

$$\mathbb{H} = L \oplus L^{\perp},$$

причем подпространство L конечномерно, а оператор A допускает представление в виде суммы операторов

$$A = A_L + A_{L^{\perp}},\ A_L : \mathbb{H} \to L,\ A_{L_{\perp}} : \mathbb{H} \to L^{\perp}$$

и

$$A_L \cdot A_{L^{\perp}} = A_{L^{\perp}} \cdot A_L = \varnothing.$$

В свою очередь, каждая из частей оператора A допускает аналогичное разложение и может быть доказано (например, [1], [5], [6]), что

для любого вполне непрерывного оператора A существует разложение пространства $\mathbb{H}$ в прямую сумму инвариантных относительно оператора A подпространств $L_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\mathbb{H} = L_0 \oplus L_1 \oplus \cdots L_k \oplus \cdots\ ,\ L_i \perp L_j,$$

причем подпространство $L_0 = \mathrm{Ker} A$, а подпространства $L_k,\ k > 0$ одномерны.

Оператор A допускает представление в виде суммы операторов

$$A = A_{L_0} + A_{L_1} + \ldots,$$

где

$$A_{L_k} : \mathbb{H} \to L_k, \quad A_{L_i} \cdot A_{L_j} = A_{L_j} \cdot A_{L_i} = \varnothing.$$

4.4. Самосопряженные операторы

Самосопряженные операторы обладают особой симметрией в сравнении с другими линейными операторами.

В частности, если L – инвариантное относительно самосопряженного оператора A подпространство, то и его ортогональное дополнение $L^{\perp}$ также инвариантно.

◀ Пусть $x \in L$, $y \in L^{\perp}$. Тогда $\langle x|y\rangle = 0$. В силу инвариантности L, $Ax \in L$ и $\langle Ax|y\rangle = 0$. Рассмотрим $\langle x|Ay\rangle = \langle Ax|y\rangle = 0$, т.е., из $y \in L^{\perp}$ следует $Ay \in L^{\perp}$. ▶

Это и другие свойства самосопряженных операторов позволяют продвинуться значительно глубже в изучении свойств таких операторов. Наводящими соображениями здесь может служить структура самосопряженных операторов в конечномерных пространствах, где, как известно из курса линейной алгебры, у оператора существует полная система собственных векторов h_k, образующих базис, и матрица оператора может быть приведена к диагональному виду, так, что действие оператора раскладывается на сумму действий одномерных его частей, каждая из которых есть просто умножение на собственное число λ_k:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \tag{4.4.1}$$

и

$$\forall x \in \mathbb{H}: \; x = x_1 h_1 + x_2 h_2 + \cdots + x_n h_n \tag{4.4.2}$$

$$Ax = \lambda_1 x_1 h_1 + \lambda_2 x_2 h_2 + \cdots + \lambda_n x_n h_n. \tag{4.4.3}$$

Оказывается, аналоги разложений (4.4.1) — (4.4.3) остаются справедливыми и для самосопряженных операторов в бесконечномерных пространствах.

4.1. Спектр самосопряженного оператора

В этом разделе мы коротко остановимся на свойствах спектра самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$.

1. *Спектр самосопряженного оператора не пуст и действителен. Он целиком лежит на отрезке $[m; M]$, где*

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax|x\rangle, \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax|x\rangle$$

   и при этом точки m и M являются точками спектра[8].

2. *Все собственные числа самосопряженного оператора*[9] *A – действительны.*

[8] Доказательство, например, в [5]

[9] Конечно, если таковые есть.

◀ Пусть $Au = \lambda u$. Тогда $\langle Au|u\rangle = \langle \lambda u|u\rangle = \overline{\lambda}\langle u|u\rangle$. В то же время $\langle u|Au\rangle = \langle u|\lambda u\rangle = \lambda\langle u|u\rangle$. Поскольку оператор A самосопряжен $\langle Au|u\rangle = \langle u|Au\rangle$, то $\lambda = \overline{\lambda}$ ▶.

3. *Различным собственным числам отвечают ортогональные собственные векторы:*
$$\lambda \neq \mu \quad \Rightarrow \quad u_\lambda \perp u_\mu.$$

◀ *Если $\lambda \neq \mu$ и $Au_\lambda = \lambda u_\lambda$, $Au_\mu = \mu u_\mu$, то*
$$\langle Au_\lambda|u_\mu\rangle = \lambda\langle u_\lambda|u_\mu\rangle = \langle u_\lambda|Au_\mu\rangle = \mu\langle u_\lambda|u_\mu\rangle,$$
откуда и следует искомое.▶

Как уже отмечалось выше, каждому собственному числу отвечает собственное инвариантное подпространство. В силу сепарабельности пространства $\mathbb{H}$, размерность этого подпространства не более чем счетна. Если в каждом из таких подпространств выбрать ортнормированный базис, то мы получим ортонормированную систему во всем пространстве[10]. Эта система векторов может быть полной, а может и не быть. В любом случае все пространство $\mathbb{H}$ представляется как прямая сумма подпространства $\mathbb{H}_{in}$, натянутого на упомянутую выше ортонормированную систему, и его ортогонального дополнения $\mathbb{H}_{in}^{\perp}$:
$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_{in} \oplus \mathbb{H}_{in}^{\perp}.$$

Говорят, что *оператор A имеет чисто точечный спектр*, если так построенная ортонормированная система обладает свойством полноты в $\mathbb{H}$. В этом случае $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{in}$.

Например, из вышеизложенного следует, что если самосопряженный оператор еще и *вполне непрерывен*, то он обладает именно таким – чисто точечным спектром.

Если же у оператора A вовсе нет собственных значений, то говорят, что *оператор A имеет чисто непрерывный спектр.*

Таков, например, оператор умножения на независимую переменную.

При наличии у оператора A как дискретной, так и непрерывной частей, говорят о *смешанном спектре.*

4.2. Абстрактный интеграл Стилтьеса

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые факты из теории интегрирования числовых (может быть и комплекснозначных) функций относительно операторной меры, которые мы коротко рассмотрим ниже.

[10] Вполне может случиться, что у оператора A вовсе нет собственных значений. Тогда и подобной системы нет.

Пусть λ – действительное число, $\varphi(\lambda)$ – некоторая непрерывная (может быть и комплекснозначная) функция переменной λ.

Пусть, далее, E_λ семейство линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, обладающее следующими свойствами:

1. При каждом значении параметра λ оператор E_λ – ортогональный проектор на подпространство $H_\lambda \subset \mathbb{H}$.

2. Если $\lambda < \mu$, то $E_\lambda \le E_\mu$, т.е. оператор $\Delta^{\mu\lambda}E = E_\mu - E_\lambda$ неотрицателен. Говорят, что операторная функция E_λ *не убывает* с ростом параметра λ.

3. Существуют такие конечные значения $\lambda = \lambda_{left}$ и $\lambda = \lambda_{right}$, что $E_{\lambda_{left}=0}$ и $E_{\lambda_{right}=I}$.

4. Операторная функция E_λ непрерывна справа в каждой точке числовой прямой:

$$\forall\lambda_0 : \ \exists \lim_{\lambda\to\lambda_0+} E_\lambda = E_{\lambda_0}.$$

Семейство проекторов, обладающих свойствами 1 – 4 называется *разложением единицы.*

Отметим некоторые. достаточно очевидные, свойства разложения единицы.

1. Пусть $m = \sup\limits_{E_\lambda=0} \lambda,\ M = \inf\limits_{E_\lambda=I} \lambda$. Тогда:

$$E_\lambda = 0 \quad \forall\lambda < m; \qquad E_\lambda > 0 \quad \forall\lambda > m,$$

   в точке же $\lambda = m$ возможен скачок.

$$E_\lambda < I \quad \forall\lambda < M; \qquad E_\lambda = I \quad \forall\lambda \ge M.$$

2. Разность $\Delta^{\mu\lambda}E = E_\mu - E_\lambda$ при $\mu > \lambda$ является проектором. При этом имеет место тождество: $E_\mu E_\lambda = E_\lambda E_\mu = E_\lambda$.

3. Суперпозиция приращений на промежутках без общих внутренних точек равна нулю, а на промежутках с общей внутренней частью $[\alpha;\beta]$ равна приращению на этой общей части:

$$\Delta^{\alpha_1,\beta_1}E \cdot \Delta^{\alpha_2,\beta_2}E = \begin{cases} 0, & [\alpha_1;\beta_1] \cap [\alpha_2;\beta_2] = \varnothing \\ \Delta^{\alpha,\beta}E, & [\alpha_1;\beta_1] \cap [\alpha_2;\beta_2] = [\alpha;\beta] \end{cases}$$

   Первое из приведенных соотношений фактически означает, что какие бы элементы x и y мы ни взяли, их проекции $\Delta^{\alpha_1,\beta_1}Ex$ и $\Delta^{\alpha_2,\beta_2}Ex$ ортогональны.

Пусть $\delta > 0$ – произвольное, сколь угодно малое число. Зададим на отрезке $[m-\delta; M]$ разбиение:

$$\pi: \ m-\delta = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = M$$

и на каждом элементе разбиения π выберем произвольную точку μ_k: $\lambda_{k-1} < \mu_k < \lambda_k$.

Интегральной суммой Римана-Стилтьеса, отвечающей разбиению π и выбранным точкам μ_k, назовем сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\mu_k)(E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}).$$

Сумма S_n – линейная комбинация операторов и, следовательно, является некоторым линейным оператором.

Справедливо следующее утверждение (доказательство, например, в [12],[13]):

При неограниченном измельчении разбиения, т.е. при

$$\max |\lambda_k - \lambda_{k-1}| \to 0,$$

существует предел последовательности операторов S_n.

Этот предел[11] называется интегралом Римана-Стилтьеса от функции $\varphi(\lambda)$ и для него принято обозначение

$$S = \int\limits_{m}^{M} \varphi(\lambda) dE_\lambda. \tag{4.4.4}$$

Поскольку вне промежутка $[m; M]$ операторы E_λ постоянны, постольку там $\Delta^{\alpha,\beta} E_\lambda \equiv 0$ и интеграл Римана-Стилтьеса обычно записывают в виде

$$S = \int\limits_{m}^{M} \varphi(\lambda) dE_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) dE_\lambda. \tag{4.4.5}$$

Отметим некоторые, важные для дальнейшего, свойства оператора (4.4.5).

1. Оператор (4.4.5) — линейный ограниченный оператор в $\mathbb{H}$.

   ◀ В силу непрерывности $\varphi(\lambda)$ она ограничена на $[m; M]$, а потому

$$\forall x \in \mathbb{H}: \ \| \left(\int\limits_{m}^{M} \varphi(\lambda) dE_\lambda \right) x \| \le \max |\varphi(\lambda)| \cdot \|E_M - E_m\| \cdot \|x\| = \max |\varphi(\lambda)| \cdot \|x\|. \ ►$$

[11] Заметим, что как обычно в интегральных конструкциях, существование предела обозначает его независимость от способа разбиения. выбора точек и порядка измельчения разбиения.

2. Если функция $\varphi(\lambda)$ принимает действительные значения, то оператор (4.4.5) — самосопряженный.

   ◀ Доказательство следует из того, что проектор - самосопряженный оператор (раздел 3.2.3), линейная комбинация проекторов с действительными коэффициентами также самосопряженный оператор, и предел последовательности самосопряженных операторов – оператор самосопряженный.▶

   Таким образом, всякая действительнозначная функция и произвольное разложение единицы порождают самосопряженный оператор, задаваемый равенством (4.4.5).

   В частности, при $\varphi(\lambda) = \lambda$ получаем самосопряженный оператор A, задаваемый соотношением

$$A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda. \tag{4.4.6}$$

3. Если $\varphi_k(\lambda), k = 1, 2$ — непрерывные (может быть и комплекснозначные) функции, то оператор (4.4.5) аддитивен:

$$\forall\ \alpha_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2:\ (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)(A) = \alpha_1\varphi_1(A) + \alpha_2\varphi_2(A),$$

   или

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1\varphi_1(\lambda) + \alpha_2\varphi_2(\lambda))dE_\lambda = \alpha_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\lambda)dE_\lambda + \alpha_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\lambda)dE_\lambda.$$

4. Если, как и выше, $\varphi_k(\lambda), k = 1, 2$ — непрерывные (может быть и комплекснозначные) функции, то оператор (4.4.5) мультипликативен:

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) \cdot \varphi_2(A) = \varphi_2(A) \cdot \varphi_1(A),$$

   или

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\lambda) \cdot \varphi_2(\lambda)dE_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\lambda)dE_\lambda \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\lambda)dE_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\lambda)dE_\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\lambda)dE_\lambda.$$

   ◀ Доказательство непосредственно следует из свойства 3 разложения единицы, рассмотренного выше. ▶

   Установленные выше свойства дают основание считать оператор S функцией самосопряженого оператора, даваемого соотношением (4.4.6) и записывать (4.4.5) в виде:

$$\varphi(A) = \int\limits_{m}^{M} \varphi(\lambda) dE_\lambda.$$

В частности, для натуральных степеней оператора A получаем:

$$A^n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^n dE_\lambda.$$

Аналогично определяется оператор, являющийся корнем квадратным из положительного самосопряженного —

$$\sqrt{A} = \int\limits_{m}^{M} \sqrt{\lambda} dE_\lambda.$$

Установленные выше свойства позволяют заключить, что этот оператор удовлетворяет естественному соотношению $\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = A$.

5. Если функция $\varphi(\lambda)$ неотрицательна, то оператор $\varphi(A)$ положителен.

◀ Действительно, поскольку E_λ – проектор, постольку $E_\lambda^2 = E_\lambda$ и

$$\langle E_\lambda x | x \rangle = \langle E_\lambda^2 x | x \rangle = \langle E_\lambda x | E_\lambda x \rangle = \| E_\lambda x \|^2$$

. Отсюда

$$\langle \varphi(A) x | x \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) d\langle E_\lambda x | x \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) d \| E_\lambda x \|^2 \geq 0. \blacktriangleright$$

6. Если функция $\varphi(\lambda) = u(\lambda) + iv(\lambda)$ комплекснозначна, то оператором, сопряженным к оператору $\varphi(A) = u(A) + iv(A)$ будет оператор $\varphi^*(A) = u(A) - iv(A)$.

◀ Доказательство следует из определения сопряженного оператора и самосопряженности действительной $u(A)$ и мнимой $v(A)$ частей оператора $\varphi(A)$. ▶

4.3. Спектральное разложение самосопряженного оператора

Фундаментальным фактом в теории линейных операторов является универсальность формулы (4.4.6). Как было установлено в предыдущем разделе, для произвольного разложения единицы оператор (4.4.6) — непрерывный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Различным разложениям единицы отвечают различные операторы. Оказывается, справедливо и обратное утверждение:

Каков бы ни был самосопряженный оператор A, существует разложение единицы E_λ такое, что оператор A выражается формулой (4.4.6).

В ситуации, когда A — самосопряженный оператор в конечномерном комплексном пространстве $\mathbb{H}^n$ это утверждение – хорошо известный факт из линейной алгебры. Действительно, в этом случае совокупность собственных чисел оператора A не пуста, конечна и все собственные значения вещественны:

$$m = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k = M,\ 1 \le k \le n.$$

Если $H_j, j = 1, 2, \ldots, k$ – собственные подпространства пространства $\mathbb{H}^n$, отвечающие собственным значениям λ_j, то пространство $\mathbb{H}^n$ раскладывается в прямую сумму подпространств H_j:

$$\mathbb{H}^n = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_k.$$

Пусть $\mathcal{P}_j$ – оператор ортогонального проектирования на подпространство H_j. Определим операторы E_λ соотношением:

$$E_\lambda = \begin{cases} 0, & \lambda < \lambda_1 \\ \mathcal{P}_1, & \lambda_1 \le \lambda < \lambda_2 \\ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2, & \lambda_2 \le \lambda < \lambda_3 \\ \cdots, & \cdots \\ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \cdots + \mathcal{P}_{k-1}, & \lambda_{k-1} \le \lambda < \lambda_k \\ I, & \lambda > \lambda_k \end{cases}$$

Легко установить, что так определенные операторы E_λ образуют разложение единицы. Оператор, отвечающий по формуле (35) этому разложению дается соотношением

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_k\mathcal{P}_k.$$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ тождественен оператору A. ◀ Заметим, что из $I = \sum_1^k \mathcal{P}_j$, следует $AI = \sum_1^k A\mathcal{P}_j$. Поскольку $\forall x \in \mathbb{H}^n$ справедливо $A\mathcal{P}_j x = \lambda_j \mathcal{P}_j x$, то $Ax = \sum_1^k \lambda_j \mathcal{P}_j x$ и, следовательно, $A \equiv \mathcal{A}$. ▶

В общем случае поступим следующим образом. Если A – самосопряженный оператор, то для каждого спектрального значения λ этого оператора определим оператор A_λ соотношением:

$$A_\lambda = \begin{cases} 0, & A - \lambda I \le 0 \\ A - \lambda I, & A - \lambda I > 0 \end{cases},$$

где знаки неравенств для операторов понимаются обычным образом: $U > 0 \ \Leftrightarrow\ \langle Ux|x\rangle > 0$.

Пусть, далее, H_λ – подпространство пространства $\mathbb{H}$, являющееся ядром оператора A_λ:

$$H_\lambda = \{x \in \mathbb{H} :\ A_\lambda x = 0\}.$$

Пусть, наконец, E_λ – ортогональный проектор на подпространство H_λ.

Справедливо утверждение: *проекторы E_λ образуют разложение единицы.*

◀ 1. Действительно, по определению E_λ – ортогональные проекторы.

2. Пусть $\lambda \le \mu$. Заметим, что в этом случае имеет место неравенство $A_\lambda \ge A_\mu \ge 0$. Поэтому

$$\langle A_\lambda x|x\rangle \ge \langle A_\mu x|x\rangle \ge 0.$$

Отсюда, поскольку, по определению, $\forall x \in H_\lambda :\ A_\lambda x = 0$, то и $\langle A_\mu x|x\rangle = 0$, т.е. $A_\mu x = 0$, откуда заключаем, что из $x \in H_\lambda$ следует $x \in H_\mu$, что и означает $E_\lambda \ge E_\mu$.

3.Далее. Если $\lambda < m$, то $E_\lambda = 0$, если $\lambda \ge M$, то $E_\lambda = I$. Действительно, при $\lambda < m$ $A_\lambda = A - \lambda I$ и $\forall x \ne 0$:

$$\langle A_\lambda x|x\rangle = \langle Ax|x\rangle - \lambda\langle x|x\rangle \ge (m-\lambda)\langle x|x\rangle \ge 0$$

что возможно лишь при $x = 0$, так что $H_\lambda = \{0\} \ \Rightarrow\ E_\lambda = 0$.

Аналогичные рассуждения в случае $\lambda \ge M$ показывают, что $H_\lambda = \mathbb{H}$, и, следовательно $E_\lambda = I$.

4. Непрерывность справа операторной функции E_λ следует из определения операторов A_λ^+.

▶

В соответствии с выкладками предыдущего раздела, разложение единицы E_λ определяет некоторый самосопряженный оператор $\mathcal{A}$, задаваемый соотношением (4.4.6):

$$\mathcal{A} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda.$$

Оказывается, *оператор $\mathcal{A}$ тождественнен оператору A.*

◀ Доказательство[12] идентично приведенному выше для конечномерного случая.

Подробнее – разобъем промежуток $[m;M]$ на n частей

$$\lambda_0 < m \le \lambda_1 \le \dots \le \lambda_n = M$$

и рассмотрим проекторы

$$\Delta_k = E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}.$$

Всякий элемент $x \in \mathbb{H}$ раскладывается на попарно ортогональные слагаемые $x = \sum \Delta_k x = \sum x_k$ и действие оператора A представимо в виде $Ax = \sum Ax_k$. Пусть теперь μ_k — произвольное из промежутка $[\lambda_{k-1};\lambda_k]$. Рассмотрим разность $Ax - \sum \mu_k \Delta_k x = \sum(Ax_k - \mu_k x_k)$. В силу почти очевидного неравенства $\|Ax_k - \mu_k x_k\| \le |\lambda_k - \lambda_{k-1}| \cdot \|x_k\|$ и попарной ортогональности слагаемых правой суммы, заключаем, что

$$\|\sum(Ax_k - \mu_k x_k)\|^2 = \sum \|Ax_k - \mu_k x_k\|^2 \le \max|\lambda_k - \lambda_{k-1}|^2 \|x\|^2,$$

откуда, при $\max|\lambda_k - \lambda_{k-1}| \to 0$, следует

$$Ax = \lim \sum \mu_k \Delta_k x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda = \mathcal{A},$$

чем доказательство и завершается.▶

[12]По крайней мере, идейно.

Таким образом, между самосопряженными операторами и разложениями единицы установлено взаимнооднозначное соответствие. А поскольку свойства проекторов E_λ тесно связаны со спектром оператора, то спектр (равно как и семейство проекторов) полностью определяет самосопряженный оператор.

Семейство проекторов E_λ обычно назвают *спектральной функцией* самосопряженного оператора A.

Отметим несколько важных свойств спектральной функции:

1. Действительное число λ является регулярным значением оператора A тогда и только тогда, когда точка λ является точкой постоянства[13] *спектральной функции E_λ.*

Напомним, что в этом случае определена резольвента R_λ, которая будет даваться соотношением

$$R_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_t}{t-\lambda} dt$$

2. Действительное число λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда точка λ является точкой скачка[14] *спектральной функции. При этом оператор $\Delta_\lambda^+ = E_\lambda - E_{\lambda-}$ – проектор на собственное подпространство, отвечающее собственному числу λ.*

3. Действительное число λ является точкой непрерывного спектра оператора A тогда и только тогда, когда точка λ является точкой непрерывности спектральной функции.

4. Если число λ является собственным значением оператора A, то число $f(\lambda)$ является собственным значением оператора $f(A)$ с тем же собственным вектором:

$$Ax_\lambda = \lambda \cdot x_\lambda \;\Rightarrow\; f(A)x_\lambda = f(\lambda) \cdot x_\lambda.$$

4.4. Коммутирующие самосопряженные операторы

Как уже отмечалось выше, коммутирующие самосопряженные операторы отвечают в квантовой механике одновременно измеримым наблюда-

[13] Точка λ называется точкой постоянства спектральной функции, если существует $\delta > 0$ такое, что $\forall s \in (\lambda-\delta; \lambda+\delta)\ E_s = E_\lambda$.

[14] Точка λ называется точкой скачка спектральной функции, если $E_\lambda \neq E_{\lambda-}$, где

$$E_{\lambda-} = \lim_{\delta\to 0} E_{\lambda-\delta}.$$

емым. Поэтому важным моментом теории являются условия, обеспечивающие перестановочность самосопряженных операторов. На некоторых из них мы кратко остановимся ниже.

Фундаментальным обстоятельством при исследовании этой проблемы является следующее простое утверждение:

Самосопряженные операторы A и B коммутируют тогда и только тогда, когда их спектральные функции E^A_λ и E^B_μ коммутируют при любых λ и μ.

◀ Доказательство немедленно следует из коммутативности самосопряженного оператора с операторами его разложения единицы. ◀

Рассмотрим конечное число $A_1, A_2, \ldots, A_k$ самосопряженных операторов в $\mathbb{H}$. Справедливо утверждение:

Если самосопряженные операторы $A_i, i = 1, 2, \ldots, k$ попарно коммутируют, то в пространстве $\mathbb{H}$ существует полный ортонормированный базис из векторов, являющихся собственными для каждого из этих операторов.

◀ Наметим доказательство этой теоремы для случая операторов с дискретным спектром.

Пусть A — самосопряженныей оператор с дискретным спектром. В этом случае пространство $\mathbb{H}$ раскладывается в прямую сумму инвариантных подпространств $\mathcal{H}^A_i$, каждое из которых — собственное для оператора A:

$$\mathbb{H} = \mathcal{H}^A_1 \oplus \mathcal{H}^A_2 \oplus \cdots\ , \quad \forall x \in \mathcal{H}^A_i:\ Ax = \lambda_i x, \tag{4.4.7}$$

Заметим, что подпространства $\mathcal{H}^A_i$ попарно ортогональны. То же справедливо и для самосопряженного оператора B и его собственных подпространств $\mathcal{H}^B_j$.

Подпространство пространства $\mathbb{H}$, являющееся пересечением подпространств $\mathcal{H}^A_i$ и $\mathcal{H}^B_j$, обозначим через $\mathcal{H}^{AB}_{ij}$. В силу сделанного выше замечания, подпространства $\mathcal{H}^{AB}_{ij}$ попарно ортогональны, если по крайней мере один из индексов у них различен и состоят из общих для операторов A и B собственных векторов.

Докажем, что пространство $\mathbb{H}$ раскладывается в прямую сумму подпространств $\mathcal{H}^{AB}_{ij}$. Для этого достаточно проверить, что любой элемент пространства, ортогональный одновременно всем подпространствам $\mathcal{H}^{AB}_{ij}$ — нулевой.

Пусть в $\mathbb{H}$ $\exists\ x \neq 0$ и такой, что $x \perp \mathcal{H}^{AB}_{ij}$. В силу (4.4.7) элемент x представим в виде $x = x_1 + x_2 + \cdots\ ,\ x_i = \mathcal{P}_{\mathcal{H}^A_i}(x)$, где, по крайней мере, одно из слагаемых не равно нулю: $\exists m:\ x_m \neq 0$. Пользуясь аналогичными соображениями, заключаем, что ненулевой элемент x_m представим в виде $x_m = x_{m1} + x_{m2} + \cdots\ ,\ x_{mj} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}^B_j}(x_m)$, где, по крайней мере, одно из слагаемых не равно нулю: $\exists n:\ x_{mn} \neq 0$.

В силу коммутативности операторов A и B, их спектральные функции (а, следовательно, и операторы проектирования) также коммутативны

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}^A_m}\mathcal{P}_{\mathcal{H}^B_n} = \mathcal{P}_{\mathcal{H}^B_n}\mathcal{P}_{\mathcal{H}^A_m}.$$

Как было отмечено в п.3.2.3, суперпозиция коммутативных ортопроекторов является оператором ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{H}^{AB}_{mn}$.

Таким образом, установлено, что какой бы ненулевой элемент пространства $\mathbb{H}$ мы ни взяли, его проекция на одно из подпространств $\mathcal{H}_{mn}^{AB}$ будет ненулевой. А потому элемент x не может быть ортогональным всем подпространствам $\mathcal{H}_{mn}^{AB}$ одновременно.

Теперь осталось в качестве базиса в $\mathbb{H}$ взять базис, образованный объединением ортонормированных базисов в подпространствах $\mathcal{H}_{ij}^{AB}$, которые состоят из общих для операторов A и B собственных векторов. Распространение доказательства на случай любого конечного числа коммутирующих операторов очевидно.▶

Выше (см. п.4.4.2, свойство 4 разложения единицы) мы установили, что различные функции самосопряженного оператора — коммутирующие операторы. Оказывается, справедливо и обратное утверждение.

Теорема Неймана. *Если самосопряженные операторы A_i, $i = \overline{1,k}$, попарно коммутируют, то существует самосопряженный оператор T такой, что каждый из операторов A_i является функцией оператора T.*

◀ Как и выше, ограничимся схемой доказательства для случая операторов с дискретным спектром[15].

Пусть A и B — коммутирующие самосопряженные операторы. Как было установлено в предыдущем утверждении, в пространстве $\mathbb{H}$ есть ортонормированный базис $\{e_k\}$ из собственных векторов этих операторов: $Ae_k = \lambda_k e_k$, $Be_k = \mu_k e_k$. Произвольный элемент $x \in \mathbb{H}$ можно представить в виде $x = \sum\limits_1^\infty x_k e_k$.

Положим $Tx = \sum\limits_1^\infty \frac{x_k}{k} e_k$. Легко установить, что так определенный оператор T самосопряжен и обладает дискретным спектром. Пусть $f_1(\lambda)$ — действительнозначная непрерывная функция, принимающая в точках $\lambda = \dfrac{1}{k}$ значения λ_k, а $f_2(\lambda)$ — принимающая в точках $\lambda = \dfrac{1}{k}$ значения μ_k.

Рассмотрим операторы $f_1(T)$ и $f_1(T)$, задаваемые соотношением (4.4.5) п. 4.4.2:

$$f_1(T) = \int\limits_m^M f_1(\lambda)dE_\lambda, \qquad f_2(T) = \int\limits_m^M f_2(\lambda)dE_\lambda.$$

Здесь E_λ — разложение единицы оператора T. Легко убедиться, что оператор $f_1(T)$ тождественен оператору A, а оператор $f_2(T)$ тождественен оператору B.

Действительно, собственные значения и собственные векторы оператора $f_1(T)$ совпадают с собственными значениями и собственными векторами оператора A, собственные векторы образуют полную ортонормированную систему в $\mathbb{H}$. Поскольку спектральные характеристики операторов $f_1(T)$ и A совпадают, то, в силу спектральной теоремы, совпадают и операторы. Аналогично для операторов $f_2(T)$ и B. ▶

В заключение, в связи с обсуждаемыми в этом разделе проблемами, заметим, что в квантовой механике важную роль играют т.н. *полные системы коммутирующих операторов.*

[15]Доказательство для случая произвольного спектра можно найти в оригинальной статье J.Neumann, Annals of Math., n.32, 1931

Система самосопряженных операторов $A_i, i = 1, 2, \ldots, k$ называется *полной системой коммутирующих операторов*, если

- операторы A_i попарно коммутируют $[A_i, A_j] = 0, i, j = 1, 2, \ldots, k$;
- ни один из операторов A_i не является функцией остальных;
- любой оператор B, коммутирующий со всеми A_i, есть функция от этих операторов.

Важность этого понятия обусловлена тем, что знание полного набора таких операторов дает возможность единообразно представить пространствао состояний квантовой системы. Операторы A_i в этом представлении допускают простое описание — они являются операторами умножения на независимую переменную.

4.5. Унитарные операторы

Пусть U – унитарный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Напомним (см. п.3.2.4), что

– *унитарный оператор обратим;*

– *необходимым и достаточным условием унитарности служит совпадение обратного к унитарному и сопряженного к нему $U^* = U^{-1}$;*

– *суперпозиция унитарных операторов унитарна и, т.о., унитарные операторы образуют группу.*

Заметим ещё, что *если оператор $\mathcal{P}$ является оператором ортогонального проектирования на некоторое подпространство L пространства $\mathbb{H}$, а U – унитарный, то оператор UPU^{-1} является оператором ортогонального проектирования на подпространство $L_1 = UL$.*

5.1. Спектр унитарного оператора

1. *Собственные значения унитарного оператора по модулю равны 1.*

   ◀ Действительно, если x собственный: $Ux = \lambda x,\ x \neq 0$, то в силу унитарности

   $$\langle x|x\rangle = \langle Ux|Ux\rangle = \langle \lambda x|\lambda x\rangle = |\lambda|^2\langle x|x\rangle,$$

   откуда и следует искомое. ▶

2. *Спектр унитарного оператора сосредоточен на единичной окружности комплексной плоскости.*

◀ Пусть $|\lambda| \neq 1$ — некоторое комплексное число. Рассмотрим оператор $U - \lambda I$.

$$\forall x \in \mathbb{H}: \quad \|(U - \lambda I)x\|^2 = \|Ux\|^2 + |\lambda|^2\|x\|^2 - \overline{\lambda}\langle x|Ux\rangle - \lambda\langle Ux|x\rangle.$$

Поскольку $\langle x|Ux\rangle = \overline{\langle Ux|x\rangle}$, то сумма слагаемых $\overline{\lambda}\langle x|Ux\rangle + \lambda\langle Ux|x\rangle = \overline{\lambda\langle Ux|x\rangle} + \lambda\langle Ux|x\rangle$ — действительное число.

Учитывая, что $\|Ux\| = \|x\|$ и используя неравенство Коши–Буняковского, заключаем,что

$$|\overline{\lambda\langle Ux|x\rangle} + \lambda\langle Ux|x\rangle| \leq |\overline{\lambda\langle Ux|x\rangle}| + |\lambda\langle Ux|x\rangle| \leq 2|\lambda| \cdot \|x\|^2.$$

Отсюда,

$$-\overline{\lambda}\langle x|Ux\rangle - \lambda\langle Ux|x\rangle \geq -2|\lambda|\|x\|^2$$

. Следовательно

$$\|(U - \lambda I)x\|^2 \geq \|x\|^2 + |\lambda|^2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = \|x\|^2(1 - |\lambda|)^2.$$

Т.о. выполнено условие (п.2.2.2) существования обратного оператора $(U - \lambda I)^{-1}$:

$$\|(U - \lambda I)x\| \geq |1 - |\lambda|| \cdot \|x\|$$

для любого комплексного значения $\lambda: \ |\lambda| \neq 1$, что означает, что все такие λ — регулярные значения унитарного оператора U, чем доказательство и завершается. ▶

3. *Различным собственным значениям унитарного оператора отвечают ортогональные собственные векторы.*

◀ Пусть $\lambda \neq \mu$ и $Ux_\lambda = \lambda x_\lambda, \ Ux_\mu = \lambda x_\mu$. Тогда

$$\langle x_\lambda|x_\mu\rangle = \langle Ux_\lambda|Ux_\mu\rangle = \langle \lambda x_\lambda|\mu x_\mu\rangle = \overline{\lambda}\mu\langle x_\lambda|x_\mu\rangle.$$

Предполагая, что собственные векторы x_λ и x_μ не ортогональны (т.е. $\langle x_\lambda|x_\mu\rangle \neq 0$), заключаем, что $\overline{\lambda}\mu = 1$. В силу $|\lambda| = 1 \ \Rightarrow \ \overline{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$, т.е. $\lambda = \mu$, что противоречит принятому допущению. ▶

Важными примерами унитарных операторов служат:

1. тождественный оператор I:

$$I: \ \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \ Ix = x;$$

2. поворот плоскости вокруг начала координат на угол φ

$$Ux = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

3. оператор умножения на $e^{ia}, \ a \in \mathbb{R}$ на комплексной плоскости:

$$Uz = e^{ia}z, \ z \in \mathbb{C};$$

4. оператор сдвига в гильбертовом пространстве $L^2_{\mathbb{R}}$,
$$Ux(t) = x(t+a),\ a \in \mathbb{R};$$
5. оператор Фурье в $L^2_{\mathbb{R}}$:
$$Ux(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau} x(\tau) d\tau.$$

5.2. Спектральное разложение унитарного оператора

Пусть $E_\lambda,\ 0 < \lambda \leq 2\pi,\ E_0 = \odot, E_{2\pi} = I$ – разложение единицы (см. п. 4.4.2), порождающее некоторый самосопряженный оператор A. Тогда, как было показано выше, произвольная непрерывная на $(0; 2\pi]$ комплекснозначная функция $\varphi(\lambda)$ порождает непрерывный ограниченный оператор $\varphi(A)$, даваемый соотношением (4.4.5):
$$\varphi(A) = \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\lambda) dE_\lambda.$$
Полагая в этом соотношении $\varphi(\lambda) = e^{i\lambda}$ приходим к оператору U:
$$U = e^{iA} = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE_\lambda. \tag{4.5.1}$$
Легко видеть, что так заданный оператор унитарен.

◀ Действительно, как было показано в разделе 4.4.2, оператор, сопряженный к U задается равенством
$$U^* = e^{-iA} = \int\limits_0^{2\pi} e^{-i\lambda} dE_\lambda,$$
и проверка справедливости соотношения $UU^* = I$, которое обеспечивает унитарность оператора U, не вызывает затруднений. ▶

Таким образом, *каждое разложение единицы порождает некоторый унитарный оператор, даваемый формулой* (4.5.1), *причем различным разложениям единицы отвечают различные операторы.*

Оказывается, (доказательство, например, в [1]), справедливо и обратное утверждение:

Если U — произвольный унитарный оператор, то существует разложение единицы $\{E_\lambda,\ 0 < \lambda \leq 2\pi\}$, такое, что оператор U представим в виде (4.5.1), *при этом различным унитарным операторам отвечают различные разложения единицы.*

Заключение

1. Общие положения

Пусть $\mathbb{H}$ – сепарабельное комплексное гильбертово пространство. Пространство $\mathbb{H}$ называется *пространством состояний квантовой системы.*

Элементы пространства состояний — функции, вообще говоря, комплекснозначные, для которых приняты обозначения $|\phi\rangle, |\psi\rangle, \ldots$, можеть быть с индексами.

Чистым состоянием квантовой системы будем называть *класс* элементов пространства $\mathbb{H}$ с единичной нормой.

Если $\mu \in \mathbb{C},\ |\mu| = 1$, то элементы $|\phi\rangle$ и $|\psi\rangle$, такие, что $|\phi\rangle = \mu|\psi\rangle$, описывают одно и то же чистое состояние.

Наблюдаемой величиной называется линейный самосопряженный оператор в пространстве $\mathbb{H}$. В квантовой механике традиционно, операторы обозначаются буквами латинского алфавита с "крышечкой" над ними[16] — $\hat{A}, \hat{B}, \ldots$.

Состояния квантовой системы и наблюдаемые являются основными характеристиками квантовой системы.

В реальном эксперименте измеряются реальные физические объекты и/или процессы. Результат подобных измерений – действительные числа. Связь между наблюдаемыми (т.е. операторами) и измерениями (т.е. числами) устанавливается согласно предположению, что результатом измерения наблюдаемой $\hat{A}$ являются *спектральные значения* оператора, описывающего наблюдаемую. Другими словами, полученное в эксперименте измерение $\lambda \in \mathbb{R}$ – точка спектра оператора $\hat{A}$.

Измерения от эксперимента к эксперименту могут варьироваться. Поэтому важное значение при описании наблюдаемых имеет *закон распределения* возможных измерений, т.е. правило, позволяющее установить какие из возможных измерений могут встречаться в эксперименте чаще, а какие — реже.

[16] Эта крышечка называется *циркумфлекс.*

Этот закон определяется спектральной функцией E_λ оператора $\hat{A}$. Полагают, что числовая функция $F_A(\lambda) = \langle E_\lambda \psi | \psi \rangle$ задает распределение возможных измерений системы, находящейся в чистом состоянии $|\psi\rangle$.

Характерные особенности этого распределения могут быть описаны его числовыми характеристиками — средним значением $\overline{\lambda}_A = \langle \hat{A} \rangle$ измеряемой наблюдаемой $\hat{A}$ и рассеянием (дисперсией) $\Delta_A^2(\lambda)$ возможных измерений λ относительно этого среднего.

Они даются соотношениями

$$\overline{\lambda}_A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dF_A(\lambda) = \langle A\psi | \psi \rangle, \quad \Delta_A^2(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \overline{\lambda}_A)^2 dF_A(\lambda). \tag{4.5.2}$$

В реальном эксперименте многократное измерение наблюдаемой приводит к набору действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. Закон больших чисел позволяет, используя эти измерения, получить *оценки* величин $\overline{\lambda}_A$ и $\Delta_A^2(\lambda)$:

$$\overline{\lambda_A} \simeq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k, \qquad \Delta_A^2(\lambda) \simeq \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} (\lambda_k - \overline{\lambda}_A)^2.$$

В этих соотношениях значок $\simeq$ означает, что с увеличением количества экспериментальных данных ($N \to \infty$) в подавляющем большинстве случаев левые части выписанных равенств будут незначительно отличаться от правых. Точнее

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{N \to \infty} P \left\{ \left| \overline{\lambda}_A - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \right| \geq \varepsilon \right\} = 0.$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга. *Для любых двух наблюдаемых A, B и любого чистого состояния $|\psi\rangle$ имеет место неравенство, называемое соотношением неопределенностей Гейзенберга*:

$$\Delta_A(\lambda) \cdot \Delta_B(\lambda) \geq \frac{1}{2} \left| \overline{[\hat{A}, \hat{B}]} \right|. \tag{4.5.3}$$

Здесь $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ – коммутатор наблюдаемых $\hat{A}, \hat{B}$, $\Delta_A(\lambda) = \sqrt{\Delta_A^2(\lambda)}$, $\Delta_B^2(\lambda) = \sqrt{\Delta_B^2(\lambda)}$.

◄ Для доказательства этого утверждения нам понадобятся следующие простые факты.

- Если μ и ν произвольные числа, то для любых наблюдаемых $\hat{A}, \hat{B}$ и любого чистого состояния $|\psi\rangle$ справедливо тождество $[\hat{A} - \mu I, \hat{B} - \nu I] = [\hat{A}, \hat{B}]$.

- Если $\overline{\lambda}_A$ – среднее значение наблюдаемой в чистом состоянии $|\psi\rangle$, то $\overline{\lambda - \overline{\lambda}_A} = 0$. Поэтому $\Delta_A^2(\lambda - \overline{\lambda}_A) = \Delta_A^2(\lambda)$.

- Поскольку $\|\hat{A}|\psi\rangle\|^2 = \langle\hat{A}\psi|A\psi\rangle = \langle\hat{A}^2\psi|\psi\rangle$, то, в силу предыдущего замечания и соотношения (4.5.2), $\Delta_A^2(\lambda) = \|\hat{A}\psi\|^2$. Для любых двух наблюдаемых $\hat{A}, \hat{B}$ справедливо:

$$\langle\hat{A}\hat{B}\psi|\psi\rangle = \langle\hat{B}\psi|\hat{A}\psi\rangle, \quad \langle\hat{B}\hat{A}\psi|\psi\rangle = \langle\hat{A}\psi|\hat{B}\psi\rangle, \quad |\langle\hat{A}\psi|\hat{B}\psi\rangle| = |\langle\hat{B}\psi|\hat{A}\psi\rangle|. \qquad (*)$$

Рассмотрим среднее значение коммутатора наблюдаемых $\overline{[\hat{A},\hat{B}]} = \langle(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\psi|\psi\rangle$.

$$\overline{[\hat{A},\hat{B}]} = \langle\hat{A}\hat{B}\psi|\psi\rangle - \langle\hat{B}\hat{A}\psi|\psi\rangle = \langle\hat{B}\psi|\hat{A}\psi\rangle - \langle\hat{A}\psi|\hat{B}\psi\rangle.$$

Отсюда, используя соотношение (*), заключаем

$$\left|\overline{[\hat{A},\hat{B}]}\right|^2 = |\langle\hat{B}\psi|\hat{A}\psi\rangle - \langle\hat{A}\psi|\hat{B}\psi\rangle|^2 \le 4|\langle\hat{A}\psi|\hat{B}\psi\rangle|^2.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского $|\langle\hat{A}\psi|\hat{B}\psi\rangle|^2 \le \|\hat{A}\psi\|^2 \cdot \|\hat{B}\psi\|^2$.

Взяв теперь в полученном неравенстве в качестве оператора $\hat{A}$ оператор $\hat{A} - \overline{\lambda}_A \cdot I$, а в качестве оператора $\hat{B}$ – оператор $\hat{B} - \overline{\lambda}_B \cdot I$ и используя отмеченные выше свойства скалярных произведений, приходим к неравенству (4.5.3). ►

В квантовой механике величины $\Delta_A(\lambda), \Delta_B(\lambda)$ трактуются как точность измерений наблюдаемых $\hat{A}, \hat{B}$. Из неравенства (4.5.3) следует, что не существует таких состояний $|\psi\rangle$, в которых *все* наблюдаемые могли бы быть измерены с любой наперед заданной точностью. Если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ не коммутируют, то увеличение точности измерения одной из наблюдаемых вызывает снижение точности измерения другой.

2. Операторы квантовой механики

В классической механике простейшей системой является одна частица, характер поведения которой описывается координатами x, y, z и импульсами p_x, p_y, p_z. Все прочие характеристики поведения частицы являются функциями этих величин.

В квантовой механике аналогами классических координат и импульсов выступают наблюдаемые (т.е. операторы) $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}, \hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z$, определяющие все прочие характеристики квантовомеханической системы.

I. Операторы координаты и импульса. Пусть $\psi = \psi(x, y, z)$ — элемент пространства состояний[17] $\mathbb{H}$. Каждой координате ставится в соответствие

[17] Пространство состояний нескольких частиц — тензорное произведение пространств состояний для каждой отдельной частицы.

наблюдаемая (т.е. оператор), обозначаемая обычно тем же символом и действующая на элементы пространства состояний как умножение на соответствующую координату:

$$\hat{X}\psi(x,y,z) = x\cdot\psi(x,y,z),\ \hat{Y}\psi = y\cdot\psi(x,y,z),\ \hat{Z}\psi = z\cdot\psi(x,y,z).$$

Если символом r обозначить радиус-вектор точки $M(x,y,z)$, а символом $\hat{R}$ соответствующий оператор, то эти соотношения можно записать в векторной форме:

$$\hat{R}\psi(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\psi(x,y,z) \\ y\psi(x,y,z) \\ z\psi(x,y,z) \end{pmatrix}$$

При этом полагают, что пространство состояний, это $L^2_{\mathbb{R}^3}$ со скалярным произведением:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \psi_1(x,y,z)\overline{\psi_2(x,y,z)}dxdydz.$$

Такое представление пространства состояний иногда называют *координатным* или представлением Шредингера.

Отметим, что операторы импульсов в этом представлении действуют как операторы дифференцирования:

$$\hat{P}_x\psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi,\ \hat{P}_y\psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\psi, \hat{P}_z\psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\psi.$$

Или, в векторной форме:

$$\hat{P}\psi = i\hbar\hat{\nabla}\psi = -i\hbar\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\psi(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Одноименные операторы координат и импульсов не коммутируют.

◀ Действительно, например для операторов $\hat{X}$ и $\hat{P}_x$ имеем:

$$[\hat{X},\hat{P}_x] = \hat{X}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{X} = -ix\hbar\frac{\partial}{\partial x} + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}x = -ix\hbar\frac{\partial}{\partial x} + i\hbar + ix\hbar\frac{\partial}{\partial x} = i\hbar.\ ▶$$

II. Оператор Гамильтона (оператор полной энергии). В квантовой механике (по аналогии с классической) оператор Гамильтона — это наблюдаемая, отвечающая полной энергии системы и задаваемая соотношением

$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$. Здесь

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \Delta = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),\ \hat{U} = U(x, y, z, t)$$

операторы кинетической и потенциальной энергий системы. Оператор потенциальной энергии понимается как оператор умножения на функцию U.

Легко видеть, что оператор кинетической энергии коммутирует с оператором импульса и не коммутирует с оператором координаты.

III. Унитарно эквивалентные представления. Пусть U – унитарный в $\mathbb{H}$ оператор, $\hat{A}$ – наблюдаемая, $|\psi\rangle$ – чистое состояние. Положим

$$\psi' = U\psi, \qquad \hat{A}' = U\hat{A}U^{-1}$$

и рассмотрим другое описание квантовомеханической системы, при котором чистые состояния описываются элементами $|\psi'\rangle$, а наблюдаемые – операторами $\hat{A}'$. Это описание (в квантовой механике говорят – представление) эквивалентно исходному в силу инвариантности скалярного произведения относительно унитарного преобразования. Имеющие физический смысл величины (например, даваемые соотношениями (4.5.2)) при этом не изменяются.

Так, например, если в качестве оператора U взять оператор Фурье-Планшереля в $L^2_{\mathbb{R}^3}$:

$$U\psi(x, y, z) = \psi'(p_x, p_y, p_z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{i}{\hbar}(xp_x + yp_y + zp_z)}\psi(x, y, z)dxdydz,$$

то мы получим другое представление[18] квантовомеханической системы, в котором координаты представлены операторами дифференцирования,

$$\hat{X}' = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}, \quad \hat{Y}' = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_y}, \quad \hat{Z}' = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_z},$$

а импульсы — операторами умножения:

$$\hat{P}'_x = p_x, \quad \hat{P}'_y = p_y, \quad \hat{P}'_z = p_z.$$

[18]Его обычно называют *импульсным или представлением Гейзенберга.*

IV. Эволюция квантовой системы. В классической механике динамика системы может быть описана с помощью уравнений Гамильтона или, эквивалентным образом, посредством уравнений Лиувилля.

Аналогично дело обстоит и в квантовой механике.

Если $\hat{H}$ — оператор Гамильтона квантовомеханической системы в координатном представлении, $|\psi\rangle$ — вектор состояния, меняющийся со временем, то эволюция такой системы описывается уравнением

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi, \qquad \psi(t_0) = \psi_0. \tag{4.5.4}$$

Уравнение (4.5.4) называется уравнением Шредингера. Это основное уравнение квантовой механики. Описание эволюции квантовомеханической системы с помощью уравнения (4.5.4) является аналогом классического формализма Лиувилля.

В этом представлении предполагается, что наблюдаемые со временем не меняются, в то время как состояние эволюционирует из некоторого начального состояния $\psi(t_0) = \psi_0$ к состоянию $\psi(t), t \geq t_0$.

В гейзенберговском представлении предполагается, что со временем эволюционируют только наблюдаемые $\hat{A}(t)$.

Можно показать (например, [15],[16]) что их эволюция будет описываться уравнением:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}(t) = [\hat{H}, \hat{A}],$$

которое называется уравнением Гейзенберга.

Уравнение Гейзенберга – аналог классического формализма Гамильтона.

Библиографический список

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М.. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве., Харьков, Выща школа., т.1, 1977, т.2, 1978

2. Демидович Б.П. Математические основы квантовой механики., СПб., Лань, 2005.

3. Колмогоров А.Н., Фомин.С.В. Элементы теории функций и функционального анализа., М., Наука, 1972.

4. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988

5. Люстерник Л.А., Соболев В.И.. Элементы функционального анализа., М., Наука, 1966.

6. Люстерник Л.А., Соболев В.И.. Краткий курс функционального анализа., М., ФМЛ, 2009.

7. Наймарк М.А.. Нормированные кольца., М., Наука, 1968

8. Дж. фон Нейман. Математические основы квантовой механики.,М., Наука, 1964.

9. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.. Лекции по функциональному анализу.М., Мир, 1979

10. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики., т.1, Функциональный анализ., М., МИР, 1977.

11. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике., М., Наука, 1976

12. Смирнов В.И. Высшая математика., т.5, М., ФизМатГиз, 1959.

13. Треногин В.А. Функциональный анализ.М., Наука, 1980.

14. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу., М.,ФМЛ, 2002

15. Функциональный анализ. СМБ, (под ред Крейна С.Г.). М., Наука, 1972

16. Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков., Л., Изд. ЛенГосУниверситета., 1980.

Учебное издание

Бескачко Валерий Петрович,
Заляпин Владимир Ильич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Техн. редактор *А.В. Миних*
Дизайн обложки *А.В. Коноваловой*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 22.05.2019. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 8,37. Тираж 50 экз. Заказ 139/467.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.