Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра математического и функционального анализа

519.8(07)
К889

К.Н. Кудрявцев, С.А. Шунайлова

ЭЛЕМЕНТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2013

УДК 519.87(075.8)
К889

Одобрено
учебно-методической комиссией
механико-математического факультета

Рецензенты:
Кипнис М.М., Пазий Н.Д.

Кудрявцев, К.Н.
К889 **Элементы исследования операций:** учебное пособие / К.Н. Кудрявцев, С.А. Шунайлова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – 89 с.

Учебное пособие содержит теоретический материал, алгоритмы решения задач по темам, входящим в курс математики для экономических направлений подготовки бакалавров в вузе. Рассмотрены примеры составления математических моделей задач с экономическим содержанием, решения полученных задач и постоптимального анализа.

Пособие предназначено для студентов укрупненной группы специальностей 080000 при изучении курсов математики, линейной алгебры и прикладных задач оптимизации.

УДК 519.87(075.8)

Глава 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 1. Составление математических моделей

Многие экономические задачи по планированию и управлению решаются математическими методами. Но предварительно нужно записать условия задачи с помощью функций и других математических объектов, т.е. составить **математическую модель** задачи. Рассмотрим примеры задач с экономическим содержанием, которые сводятся к так называемым задачам линейного программирования.

При составлении математической модели следует ответить на вопросы:

1. Что является ***искомыми величинами*** задачи?

Искомые величины являются ***переменными*** задачи, которые, как правило, обозначаются малыми латинскими буквами, как правило, с индексами (одним или двумя), например, x_1, y_2, x_{11} и т.д.

2. Какова ***цель*** решения? Какой ***параметр*** задачи служит критерием эффективности (оптимальности) решения, например, прибыль, себестоимость, время и т.д. В каком ***направлении*** должно изменяться значение этого параметра (к max или к min) для достижения наилучших результатов?

Цель решения записывается в виде ***целевой функции***, обозначаемой, например, z, F и т.п.

3. Какие ***условия*** в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены?

Эти условия устанавливают, как должны соотноситься друг с другом различные параметры задачи, например, количество ресурса, затраченного при производстве, и его запас на складе; количество выпускаемой продукции и емкость склада, где она будет храниться; количество выпускаемой продукции и рыночный спрос на эту продукцию и т.д.

Условия, налагаемые на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы равенств или неравенств, т.е. ***системы ограничений***.

Задача 1 (о смеси).

Известно, что при правильном питании человек должен получать в день не менее 20 единиц витамина А, не менее 15 единиц витамина В. Содержание этих витаминов в одной единице каждого из продуктов Π_1, Π_2, Π_3 задано таблицей (табл. 1). Составить наиболее дешевый рацион питания.

Таблица 1

Продукты	Витамины		Стоимость одной единицы Π_i
	А	В	
Π_1	4	3	25
Π_2	5	2	30
Π_3	2	6	20
Ограничения	20	15	

Решение. Введем переменные. Пусть x_i – количество продукта Π_i, потребляемого в день $(i=1,\ 2,\ 3)$.

Введем функцию, экстремум которой требуется найти. Стоимость всех продуктов (обозначим F) будет равна $F=25x_1+30x_2+20x_3$.

Количество витамина А, которое попадет в рацион питания равно $4x_1+5x_2+2x_3$, витамина В – $3x_1+2x_2+6x_3$. Запишем все ограничения задачи в виде уравнений и неравенств и добавим условия неотрицательности переменных. Получаем математическую модель:

$$\min F=25x_1+30x_2+20x_3,$$
$$\begin{cases}4x_1+5x_2+2x_3\geq 20,\\ 3x_1+2x_2+6x_3\geq 15,\end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3\geq 0.$$

Задача 2 (об использовании ресурсов).

Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силы и оборудования, необходимых для производства любого из четырех видов производимой продукции. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного вида продукции, прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в таблице (табл. 2).

Таблица 2

Виды ресурсов	Виды продукции				Запасы ресурсов
	1	2	3	4	
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила, чел-ч.	22	14	18	30	400
Оборудование, станко-ч.	10	14	8	16	128
Прибыль на единицу продукции, тыс.руб.	30	25	56	48	

По государственному заказу, принятому предприятием, должно быть выпущено не менее 1 ед. продукции первого вида и 5 ед. – второго вида.

Необходимо определить, сколько продукции каждого вида надо выпускать, чтобы прибыль была максимальной.

Решение. Пусть x_i (ед.) – количество продукции i-го вида, которое будет выпускаться по плану $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Прибыль от реализации всей продукции z будет равна $z=30x_1+25x_2+56x_3+48x_4$. Количество израсходованного сырья (кг): $3x_1+5x_2+2x_3+4x_4$, рабочей силы (чел-ч.) – $22x_1+14x_2+18x_3+30x_4$, оборудования (станко-ч.) – $10x_1+14x_2+8x_3+6x_4$.

Математическая модель имеет вид

$$\max z=30x_1+25x_2+56x_3+48x_4,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 60, \\ 22x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 30x_4 \le 400, \\ 10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 6x_4 \le 128 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 1,\ x_2 \ge 5,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Задача 3 (об использовании ресурсов).

Фирма заключила контракт на поставку ежемесячно 200 стульев и 400 столов. Производство мебели ограничивается возможностями трудозатрат на обработку в трех цехах: производства, сборки и упаковки. В таблице (табл. 3) показано, сколько чел-ч. затрачивается в каждом цехе на производство каждой единицы продукции и сколько чел-ч. имеется в наличии в каждом из цехов.

Таблица 3

Цех	Трудозатраты на единицу мебели, чел-ч/шт.		Количество чел-ч в наличии, в месяц
	стул	стол	
Производства	0,10	0,20	250
Сборки	0,15	0,25	400
Упаковки	0,05	0,05	200

Из-за недопоставок материалов в текущем месяце фирма не может полностью удовлетворить спрос своими силами. Поэтому она провела переговоры с другим производителем, который в настоящее время располагает избыточными мощностями. Этот производитель согласился поставлять фирме в любом соотношении стулья по 5 тыс.р. за штуку и столы по 10 тыс.р. за штуку. Эти цены превышают себестоимость самостоятельно произведенной мебели на 2 тыс.р. за каждый стул и на 4 тыс.р. за каждый стол. Задача фирмы состоит в том, чтобы найти такое соотношение закупаемой и производимой мебели, которое привело бы к минимальным затратам при удовлетворении спроса.

Решение. Пусть x_1 (шт.) – количество стульев, x_2 (шт.) – количество столов, которое будет выпускаться на фирме;

x_3 (шт.) – количество стульев, x_4 (шт.) – количество столов, которое будет закупаться у другого производителя.

Общие затраты составляют $z = 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 10x_4$.

Получаем математическую модель:

$$\min z = 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 10x_4,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 \ge 200, \\ x_2 + x_4 \ge 400, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \le 250, \\ 0{,}15x_1 + 0{,}25x_2 \le 400, \\ 0{,}05x_1 + 0{,}05x_2 \le 200, \end{cases}$$
$$x_k \ge 0,\ k = 1, 2, 3, 4; \text{ целые.}$$

Задача 4 (о раскрое материала).

Для изготовления некоторого изделия требуется 2 планки по 2 м длиной, 3 – по 2,5 м и одна трехметровая. Для получения этих планок используют 100 досок по 7 м длиной. Как распилить доски, чтобы получить наибольшее число комплектов?

Решение. Рассмотрим все возможные варианты распиливания досок (табл. 4). Занесем в таблицу количество планок каждой длины, получаемых при каждом варианте распила.

Таблица 4

Длина планки, м	Номер варианта					
	1	2	3	4	5	6
2,0	3	2	2	1	0	0
2,5	0	1	0	2	1	0
3,0	0	0	1	0	1	2

Обозначим через x_i количество досок, распиленных i-м способом $\left(i=1, 2, ..., 6\right)$. Тогда заготовок по 2 м получится $3x_1+2x_2+2x_3+x_4$, по 2,5 м – $x_2+2x_4+x_5$; по 3 м – $x_3+x_5+2x_6$.

Обозначим через k число полученных изделий, тогда для возможности составления комплектов, должны выполняться условия

$$3x_1+2x_2+2x_3+x_4 \ge 2k,$$

$$x_2+2x_4+x_5 \ge 3k,$$

$$x_3+x_5+2x_6 \ge k.$$

Получим математическую модель

$$\max z = k,$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+x_4 \ge 2k, \\ x_2+2x_4+x_5 \ge 3k, \\ x_3+x_5+2x_6 \ge k \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \le 100, \end{cases}$$

$x_i \ge 0$, $i=1, 2, ..., 6$, $k \ge 0$, целые.

Задача 5 (планирование производства).

Некоторое предприятие выпускает три типа продукции: Π_1, Π_2, Π_3 двумя технологическими способами: S_1 и S_2. Количество продукции каждого вида, произведенной каждым способом за единицу времени и стоимость продукции приведены в таблице (табл. 5).

Таблица 5

Технологический способ	Тип продукции			Лимит времени
	Π_1	Π_2	Π_3	
S_1	20	25	30	10
S_2	30	20	15	8
Стоимость ед. продукции	5	3	6	

Необходимо так организовать производство, чтобы получить наибольшую прибыль от ее реализации.

Решение. Обозначим через x_{ij} время, затраченное на изготовление продукции Π_j $(j = 1, 2, 3)$ i-м способом $(i = 1, 2)$. Тогда план производства будет иметь вид (табл. 6).

Таблица 6

Способ	Вид продукции		
	Π_1	Π_2	Π_3
S_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}
S_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}

При этом продукции 1-го вида будет выпущено $20x_{11} + 30x_{21}$, 2-го вида – $25x_{12} + 20x_{22}$, 3-го вида – $30x_{13} + 15x_{23}$. Стоимость всей продукции (обозначим ее F) равна $5(20x_{11} + 30x_{21}) + 3(25x_{12} + 20x_{22}) + 6(30x_{13} + 15x_{23})$ и она должна быть максимальной. Но при этом есть ограничения по времени: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 10$, $x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 8$ и очевидно, все $x_{ij} \ge 0$. Окончательно получаем математическую модель задачи

$$\max F = 5(20x_{11} + 30x_{21}) + 3(25x_{12} + 20x_{22}) + 6(30x_{13} + 15x_{23}),$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 10, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 8, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3.$$

Задача 6 (транспортная).

Имеется три месторождения угля, добыча на которых за месяц составляет 20, 30 и 40 тонн, соответственно. Добытый уголь отправляется на завод и электростанцию, потребности которых составляют 35 и 55 тонн, соответственно. Также задана матрица тарифов на перевозку

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 9 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},$$

где c_{ij} – стоимость перевозки одной тонны с каждого месторождения на завод и электростанцию ($i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2$). Требуется составить план перевозок, при котором общая стоимость перевозки была минимальной.

Решение. Обозначим через x_{ij} (тонн) – количество угля, перевезенного с каждого месторождения на завод и электростанцию ($i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2$).

Тогда план перевозок можно записать в виде матрицы X:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

При этом суммарные затраты S равны

$$S = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} = 5x_{11} + x_{12} + 4x_{21} + 9x_{22} + 3x_{31} + 8x_{32}.$$

Отметим, что все запасы будут вывезены и все потребности удовлетворены, т.к. $a_1 + a_2 + a_3 = 20 + 30 + 40 = 90$ и $b_1 + b_2 = 35 + 55 = 90$.

При заданном плане перевозок, например, с первого месторождения будет вывезено $x_{11} + x_{12}$ тонн угля и значит $x_{11} + x_{12} = 20$ и так по всем месторождениям.

Заводу требуется 35 ед. продукции, при заданном плане это соответствует сумме $x_{11} + x_{21} + x_{31}$, значит $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 35$.

Электростанции требуется $x_{12} + x_{22} + x_{31}$, значит $x_{12} + x_{22} + x_{31} = 55$.

Таким образом, получаем следующую математическую модель задачи:

$$\min S = 5x_{11} + x_{12} + 4x_{21} + 9x_{22} + 3x_{31} + 8x_{32},$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 20, \\ x_{21} + x_{22} = 30, \\ x_{31} + x_{32} = 40, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 35, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 55, \end{cases}$$

$$\text{все } x_{ij} \ge 0.$$

Задача 7 (о банке).

Пусть собственные средства банка в сумме с депозитами составляют 100 млн. долл. Часть этих средств, но не менее 35 млн. долл. должна быть размещена в кредитах. Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить кредиты в деньги без существенных потерь невозможно.

Существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов: ценные бумаги должны составлять не менее 30% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах.

Решение. Пусть x – средства (млн. долл.), размещенные в кредитах, y – средства, вложенные в ценные бумаги.

Должны выполняться следующие условия:

$$x + y \le 100 \text{ – балансовое ограничение;}$$

$$x \ge 35 \text{ – кредитное ограничение;}$$

$$y \ge 0{,}3(x + y) \text{ – ликвидное ограничение;}$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

Цель банка состоит в том, чтобы получить максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг, т.е.

$$\max F = c_1 x + c_2 y,$$

где c_1 – доходность кредитов, c_2 – доходность ценных бумаг.

Так как кредиты менее ликвидны, чем ценные бумаги, то обычно $c_1 > c_2$.

Имеем следующую систему ограничений

$$\max F = c_1 x + c_2 y,$$

$$\begin{cases} x + y \le 100, \\ x \ge 35, \\ y \ge 0{,}3(x+y), \end{cases}$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0.$$

§ 2. Постановка задачи линейного программирования

Пусть нужно найти экстремум линейной функции n переменных $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$, где $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathrm{R}$, в области, заданной системой линейных уравнений и неравенств вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ ?\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ ?\ b_2, \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ ?\ b_m, \end{cases}$$

где $a_{ij}, b_i \in \mathrm{R}$ $\left(i = 1,\ 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n\right)$, а знак «?» заменяет любой из знаков $\ge, \le, =$.

Функция z называется ***целевой функцией***.

Соотношения (равенства и неравенства) системы называются ***ограничениями задачи***.

Множество решений системы ограничений называется ***допустимым множеством*** или ***областью допустимых решений***.

Задача линейного программирования называется ***недопустимой***, если область допустимых решений является пустым множеством.

Задача линейного программирования называется ***неограниченной***, если целевая функция не ограничена сверху в задаче на максимум или не ограничена снизу в задаче на минимум. В этом случае пишут $z_{\max} = +\infty$ или $z_{\min} = -\infty$.

§ 3. Каноническая форма задачи линейного программирования. Переход от общей формы к канонической

Задача линейного программирования задана в ***канонической форме***, если она имеет вид:

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Т.е. задача линейного программирования задана в канонической форме, если выполняются три условия:

1) в задаче требуется найти минимум целевой функции;
2) все ограничения, входящие в систему – уравнения;
3) на все переменные наложены условия неотрицательности.

Если ввести обозначения $C = (c_1\ c_2\ \ldots\ c_n)$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$, то эту задачу можно записать в матричном виде

$$\min z = CX,$$
$$AX = B,$$
$$X \geq 0.$$

Задачу линейного программирования общего вида можно привести к задаче в канонической форме, используя следующие преобразования.

1. Неравенство $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leq b_k$ приводится к уравнению добавлением в левую часть неравенства дополнительной неотрицательной переменной $x_{n+1} \geq 0$.

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leq b_k \Leftrightarrow \begin{cases} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n + x_{n+1} = b_k, \\ x_{n+1} \geq 0. \end{cases}$$

2. Неравенство $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \geq b_k$ приводится к уравнению вычитанием из левой части неравенства дополнительной неотрицательной переменной $x_{n+1} \geq 0$.

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \geq b_k \Leftrightarrow \begin{cases} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - x_{n+1} = b_k, \\ x_{n+1} \geq 0. \end{cases}$$

3. Если для некоторой переменной, например, x_s, нет требования неотрицательности, то x_s представляют в виде разности двух неотрицательных переменных x'_s и x''_s: $x_s = x'_s - x''_s$, где $x'_s \ge 0$, $x''_s \ge 0$.

4. От задачи на нахождение максимума функции z переходим к задаче на нахождение минимума функции $(-z)$. При этом $z_{\max} = -(-z)_{\min}$.

Пример. Привести задачу к канонической форме

$$\max z = 2x_1 - x_2 + 4x_3,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение.

1. Вместо $\max z = 2x_1 - x_2 + 4x_3$ будем искать $\min(-z) = -2x_1 + x_2 - 4x_3$.

2. Из левой части неравенства $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 3$ вычтем $x_4 \ge 0$, получим уравнение $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3$.

3. К левой части неравенства $2x_1 - x_2 + x_3 \le 1$ прибавим $x_5 \ge 0$, получим уравнение $2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1$.

4. На переменную x_3 не наложено условие неотрицательности. Заменим x_3 разностью двух неотрицательных переменных $x_3 = x'_3 - x''_3$, $x'_3 \ge 0$, $x''_3 \ge 0$.

Итак, получаем задачу в канонической форме

$$\min(-z) = -2x_1 + x_2 - 4x'_3 + 4x''_3,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x'_3 + 2x''_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x'_3 - x''_3 + x_5 = 1, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ x'_3 \ge 0,\ x''_3 \ge 0.$$

§ 4. Графический метод решения задач линейного программирования

Пусть дана задача

$$\min\ (\max)\ \ z = c_1x_1 + c_2x_2,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ge b_2, \\ \quad\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ge b_m. \end{cases}$$

Прямая, на которой функция z постоянна, называется ***линией уровня*** функции z.

Она перпендикулярна вектору $\vec{n} = grad\, z = \{c_1;\, c_2\}$. В направлении градиента значение функции увеличивается, а в противоположном – уменьшается.

Линия уровня, которая имеет хотя бы одну общую точку с областью допустимых решений, и по отношению к которой вся эта область находится целиком в одной из полуплоскостей, называется ***опорной прямой***.

Алгоритм графического метода

1. Изобразите область допустимых решений. Если она является пустым множеством, то исходная задача недопустима.

2. Постройте вектор $\vec{n} = \{c_1;\, c_2\}$. Его можно отложить от начала координат.

3. Постройте одну линию уровня, т.е. прямую, перпендикулярную вектору $\vec{n}$.

4. Линию уровня перемещайте по направлению вектора $\vec{n}$ в задаче на максимум, и против направления этого вектора в задаче на минимум до положения опорной прямой.

5. Если такого положения достигнуть невозможно, т.е. линия уровня уходит на бесконечность, то задача не ограничена: $z_{\min} = -\infty$ или $z_{\max} = +\infty$.

6. Если положение опорной прямой достигнуто, то угловая точка (или точки, если их несколько) области допустимых решений, которая лежит на опорной прямой, является точкой максимума или минимума, соответственно. Найдите координаты этой точки (или точек), значение целевой функции в этих точках и запишите ответ.

Пример. Решите задачу $\min(\max)\; z = 3x_1 + 2x_2$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1, & (3) \\ \qquad x_2 \le 2, & (4) \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение. Построим прямые, являющиеся границами всех полуплоскостей.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 = 1, & (3) \\ \qquad x_2 = 2. & (4) \end{cases}$$

Для этого вычислим координаты точек пересечения прямых с координатными осями (табл. 7).

Таблица 7

(1)

x_1	0	6
x_2	3	0

(2)

x_1	0	4
x_2	8	0

(3)

x_1	0	–1
x_2	1	0

Прямая (4) проходит через точку $(0;\,2)$ параллельно оси x_1.

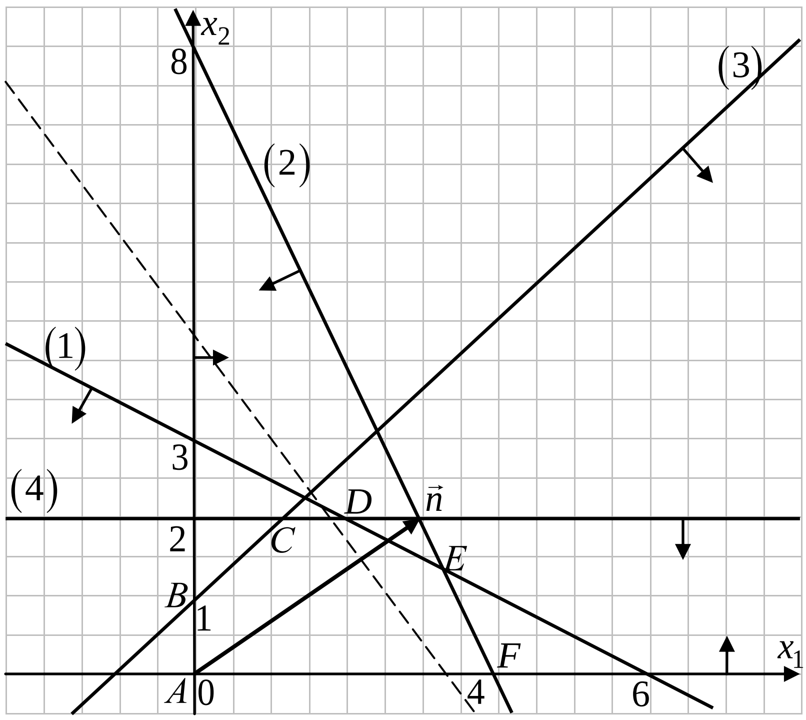

Рис. 1

Подставим точку (0;0) в ограничение (3), получим $0 \le 1$, что является истинным неравенством, поэтому стрелкой обозначим полуплоскость, содержащую точку (0;0), т.е. расположенную правее и ниже прямой (3).

Аналогично определим допустимые полуплоскости для остальных ограничений и укажем их стрелками у соответствующих прямых ограничений. Общей областью, разрешенной всеми ограничениями, является многоугольник *ABCDEF* (рис. 1).

Строим вектор $\vec{n} = \{3;\,2\}$ из точки (0;0) в точку (3;2). Линия уровня перпендикулярна этому вектору.

Точка E – это крайняя точка области допустимых решений *ABCDEF*, через которую проходит линия уровня, двигаясь по направлению вектора $\vec{n}$. Поэтому E – это точка максимума целевой функции.

Определим координаты точки E из системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}, \ E\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right).$$

Наибольшее значение: $z_{\max} = z(E) = 3\cdot\frac{10}{3} + 2\cdot\frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$.

Если перемещать линию уровня в противоположном направлении, то получим точку минимума $A(0;0)$: $z_{\min} = z(0;0) = 0$.

Ответ. $z_{\max} = z(E) = 3\cdot\frac{10}{3} + 2\cdot\frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$; $z_{\min} = z\ (0;0) = 0$.

Пример. Решите задачу $\min(\max) z = x_1 - 3x_2$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3, & (1) \\ x_1 + x_2 \ge 5, & (2) \\ x_1 \le 4, & (3) \\ -2x_1 + x_2 \ge 2, & (4) \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0.$$

Решение. Прямая (3) проходит через точку $(4;\ 0)$ параллельно оси x_2.

Остальные прямые строим каждую по двум точкам (табл. 8).

Таблица 8

(1)

x_1	0	3
x_2	1	0

(2)

x_1	0	5
x_2	5	0

(4)

x_1	0	–1
x_2	2	0

Область допустимых решений ограничена прямыми (2), (3), (4) и осью x_2 (рис. 2). Строим вектор $\vec{n}$ из точки (0;0) в точку (1;–3).

Для поиска минимума целевой функции передвигаем линию уровня против направления вектора $\vec{n}$. Поскольку в этом направлении область допустимых решений не ограничена, то невозможно в этом направлении найти крайнюю точку этой области.

Для поиска максимума будем передвигать линию уровня по направлению вектора $\vec{n}$ до вершины A – крайней точки области допустимых решений в этом направлении. Определим координаты точки A из системы уравнений ограничений (2) и (4)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, & (2) \\ -2x_1 + x_2 = 2. & (4) \end{cases} \qquad x_1 = 1;\ x_2 = 4.$$

$$z(1;4) = 1\cdot1 - 3\cdot4 = -11.$$

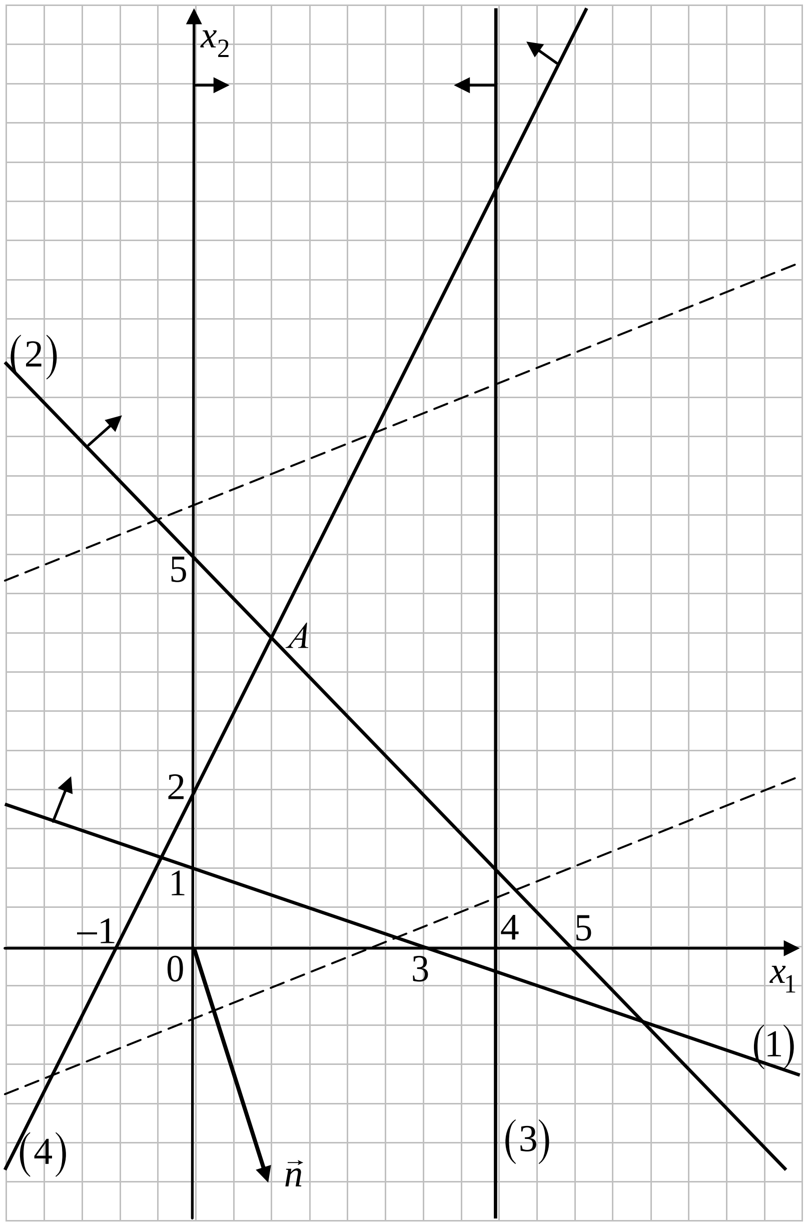

Рис. 2

Ответ. Наибольшее значение целевой функции равно $z_{\max} = -11$.

Наименьшего значения не существует, т.е. $z_{\min} = -\infty$.

Рассмотрим примеры задач, которые можно свести к задачам с двумя переменными.

Пример. Решить графически задачу

$$\min\ z = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 \ge 8, \\ 2x_1 - 3x_2 \qquad = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 3, \end{cases}$$

$$x_k \ge 0,\ k = 1,\ 2,\ 3.$$

Решение. Исключим переменную x_1 из задачи, используя второе уравнение:

$$2x_1 - 3x_2 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}.$$

Получаем задачу

$$\min\ z = 5 + x_2 - 2x_3,$$
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_2 - x_3 \ge \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}x_2 + 2x_3 \le \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2}x_2 \ge -\frac{5}{2}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \min\ z = 5 + x_2 - 2x_3, \quad \begin{cases} x_2 - 2x_3 \ge 1, \\ -x_2 + 4x_3 \le 1, \end{cases} \quad x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$
$$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

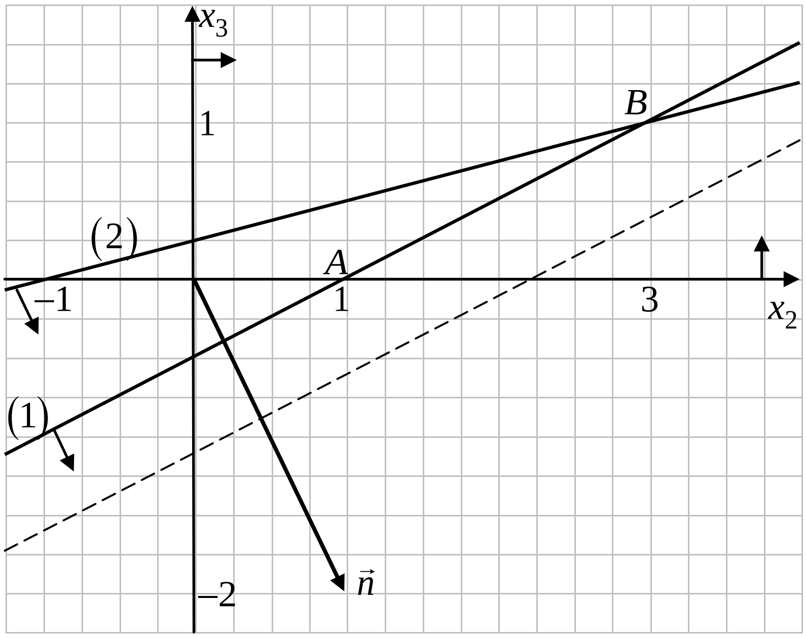

Рис. 3

Точки минимума находятся на отрезке AB, где $A(1;\,0)$, $B(3;\,1)$.

Прямая AB задается уравнением

$$\frac{x_2 - 1}{3 - 1} = \frac{x_3 - 0}{1 - 0} \Leftrightarrow \frac{x_2 - 1}{2} = \frac{x_3}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2t + 1, \\ x_3 = t, \end{cases} \quad t \in (-\infty;\, +\infty).$$

Отрезок AB задается системой уравнений $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t, \end{cases} \quad t \in [0;\, 1].$

$$x_1 = \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2} = \frac{3}{2}(2t + 1) + \frac{5}{2} = 3t + 4.$$

Ответ. $z_{\min} = z(3t + 4;\ 2t + 1;\ t) = 6,\ t \in [0;\, 1].$

В следующем примере выразим две переменные (базисные) через две другие (свободные), используя метод Жордана-Гаусса. Этот способ сведения к задаче с двумя переменными можно использовать, если число свободных переменных в системе равно двум.

Затем найдем базисные и опорные решения системы и установим соответствие между опорными решениями и вершинами многоугольник, изображающими область допустимых решений (назовем эти точки угловыми).

Пример.

1) Решить графически задачу

$$\max\ z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Решение. Выполним два жордановых исключения.

$$A = \left(\begin{array}{cccc:c} \boxed{1} & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{5} & -13 & 10 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{7}{5} & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{5} & 2 & -\frac{3}{5} \end{array}\right).$$

Из системы, соответствующей последней матрице, выразим базисные переменные x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{5} - \frac{7}{5}x_3, \\ x_2 = \frac{13}{5}x_3 - 2x_4 - \frac{3}{5}. \end{cases} \tag{1}$$

Исключим переменные x_1 и x_2 из системы ограничений.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{5} - \frac{7}{5}x_3, \\ x_1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{5} - \frac{7}{5}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq 1.$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{13}{5}x_3 - 2x_4 - \frac{3}{5}, \\ x_2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{13}{5}x_3 - 2x_4 - \frac{3}{5} \geq 0 \Leftrightarrow 13x_3 - 10x_4 \geq 3.$$

Исключим эти переменные из целевой функции. Получаем задачу:

$$\max\ z = \frac{34}{5} - \frac{49}{5}x_3 + 3x_4,$$

$$\begin{cases} x_3 \leq 1, \\ 13x_3 - 10x_4 \geq 3, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0,\ k = 3,\ 4.$$

Решим эту задачу графически (рис. 4). Затем найдем значения переменных x_1 и x_2 из равенств (1).

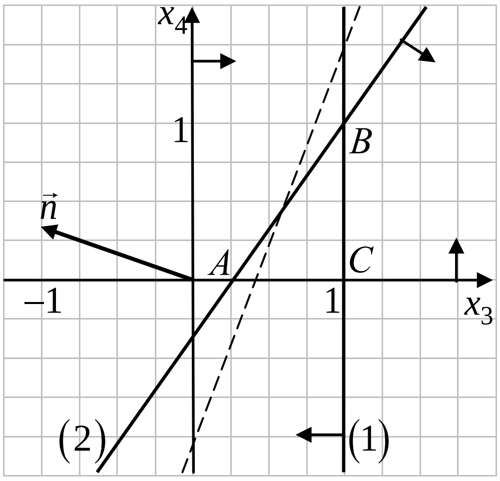

Рис. 4

Ответ. $z_{\max} = z\left(\frac{14}{13}; 0; \frac{3}{13}; 0\right) = \frac{59}{13}$.

2) Найти все базисные и опорные решения системы ограничений.

Решение. В равенствах (1) возьмем значения свободных переменных равными нулю, получим базисное решение $\left(\frac{7}{5}; -\frac{3}{5}; 0; 0\right)$, соответствующее базису x_1x_2.

Таким же образом найдем все остальные базисные решения. Выберем из них опорные. Результаты занесены в табл. 9.

Таблица 9

Базис	Базисное решение	Опорное решение
x_1x_2	$\left(\frac{7}{5}; -\frac{3}{5}; 0; 0\right)$	
x_1x_3	$\left(\frac{14}{13}; 0; \frac{3}{13}; 0\right)$	$x^{(1)} = \left(\frac{14}{13}; 0; \frac{3}{13}; 0\right)$
x_1x_4	$\left(\frac{7}{5}; 0; 0; -\frac{3}{10}\right)$	
x_2x_3	$(0; 2; 1; 0)$	$x^{(2)} = (0; 2; 1; 0)$
x_2x_4	Не существует	
x_3x_4	$(0; 0; 1; 1)$	$x^{(3)} = (0; 0; 1; 1)$

На рис. 5 показано, что каждая из трех угловых точек допустимого множества соответствует ровно одному опорному решению.

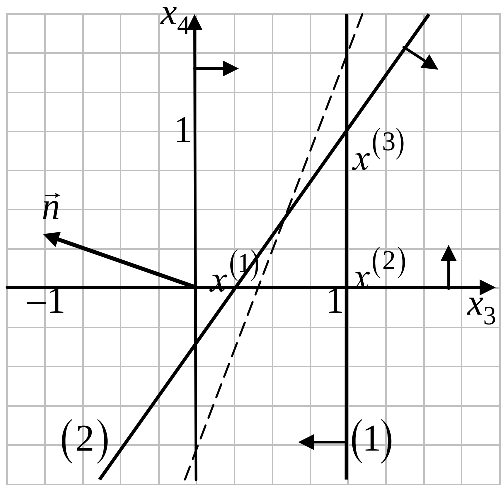

Рис. 5

Такое соответствие угловых точек и опорных решений системы ограничений позволяет решать задачи так называемым методом полного перебора. Для этого нужно:

1. Найти все опорные решения системы ограничений задачи.
2. Вычислить значения целевой функции на каждом опорном решении.
3. Выбрать наибольшее (наименьшее) значения.

Метод имеет существенное ограничение: его можно применять, только если известно, что задача имеет решение. Например, если область допустимых решений ограничена.

§ 5. Исследование модели на чувствительность

Рассмотрим исследование модели на чувствительность с помощью графического метода на примере.

Предприятие изготавливает два вида продукции: $П_1$ и $П_2$, используя два вида сырья: A и B. Запасы сырья в сутки, расход сырья на производство единицы продукции каждого вида и прибыль от реализации единицы продукции даны в таблице (табл. 10).

Таблица 10

Сырье	Расход		Запасы
	$П_1$	$П_2$	
A	2	3	9
B	3	2	13
Прибыль	3	4	

Опыт работы показал, что суточный спрос на $П_1$ никогда не превышает спроса на $П_2$ более, чем на 1 ед. Известно, что спрос на $П_2$ не превышает 2 ед. в сутки.

Составить план производства, приносящий наибольшую прибыль.

Решение. Пусть x_1 – количество продукции Π_1, которое будет произведено по плану, x_2 – количество продукции Π_2. Математическая модель задачи:

$$\max\ z = 3x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_1 \ge 0.$$

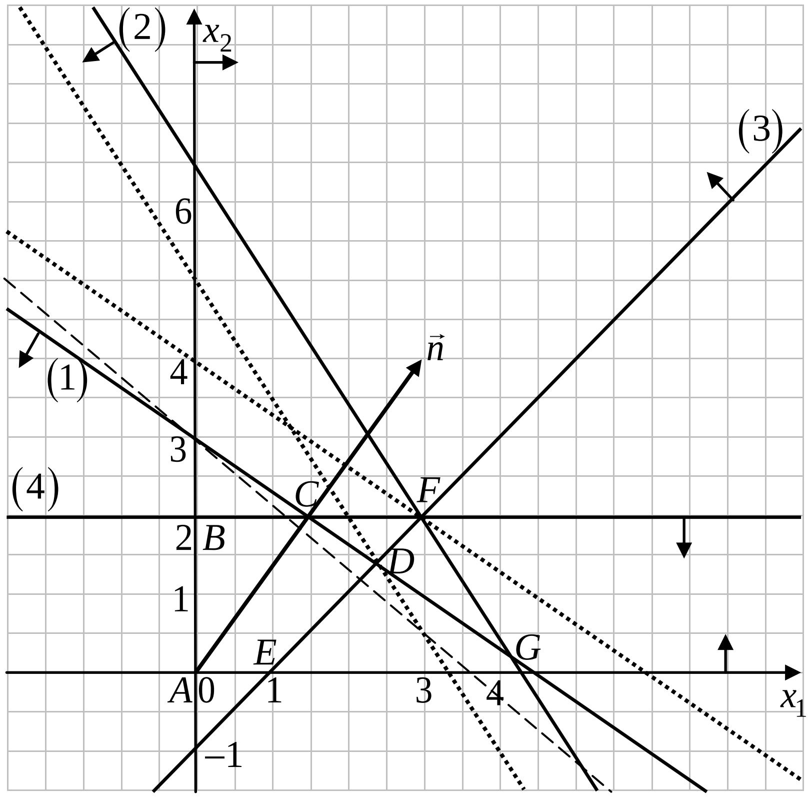

Рис. 6

Координаты точек пересечения прямых:

$$A(0;\,0),\ B(0;\,2),\ C\left(\frac{3}{2};\,2\right),\ D\left(\frac{12}{5};\,\frac{7}{5}\right),\ F\,(3;\,2).$$

Допустимая область – пятиугольник $ABCDE$ (рис. 6).

Точка максимума – точка $D\left(\dfrac{12}{5};\,\dfrac{7}{5}\right)$.

Ответ: $z_{\max} = z\left(\frac{12}{5}; \frac{7}{5}\right) = \frac{64}{5}$, т.е. следует производить 2,4 ед. продукции Π_1 и 1,4 ед. продукции Π_2. Прибыль при этом составит 12,8 усл. ден. ед.

Сырье А при оптимальном плане будет израсходовано полностью, оно называется ***дефицитным.***

Сырье В останется в размере $13 - 3 \cdot 2{,}4 - 2 \cdot 1{,}4 = 3$ ед. Оно называется ***недефицитным***.

После решения задачи ответим на некоторые вопросы.

1. До какого объема можно пополнять запасы дефицитного сырья, увеличивая при этом прибыль?

Если запасы сырья А увеличивать, то прямая (1) будет перемещаться вверх. Производить это перемещение следует до тех пор, пока это сырье остается дефицитным, т.е. до точки *F* (на рис. 6 пунктирная линия, проходящая через точку *F*). Этой прямой соответствует количество сырья А, равное значению выражения $2x_1 + 3x_2$ в точке *F*, т.е. $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$. При этом прибыль составит $z(3;\ 2) = 17$ усл. ден. ед.

2. На сколько можно уменьшить запасы недефицитного сырья, не уменьшив при этом прибыль?

Если запасы недефицитного сырья В уменьшать, то прямая (2) будет перемещаться вниз. Остановить это перемещение следует в тот момент, когда прямая пройдет через точку *D* (на рис. 6 пунктирная линия, проходящая через точку *D*). Этой прямой соответствует количество сырья В, равное значению выражения $3x_1 + 2x_2$ в точке *D*, т.е. $3 \cdot \frac{12}{5} + 2 \cdot \frac{7}{5} = 10$. Т.е. можно уменьшить запасы недефицитного сырья на 3 ед.

Сведем все полученные результаты в таблицу (табл. 11).

Таблица 11

Сырье	Тип сырья	Максимальное изменение запаса	Возможное изменение дохода	Полезность, y_i
А	Дефицитное	+3	+4,2	1,4
В	Недефицитное	–3	0	0

Здесь, полезность сырья y_i – это увеличение дохода на единицу прироста запасов ресурса.

3. Проанализируем допустимое изменение цен.

Пусть целевая функция имеет вид $z = c_1x_1 + c_2x_2$. Изменение цен на продукцию графически выражается изменением угла наклона вектора $\vec{n}$ и опорной прямой вокруг оптимальной точки. Так, при увеличении коэффициента c_1 или уменьшении c_2 опорная прямая вращается по часовой стрелке.

Для того, чтобы оптимальное значение сохранялось в точке *D*, опорную прямую можно повернуть против часовой стрелки до совпадения с прямой (1), а по часовой стрелке – до вертикального положения. Далее по часовой стрелке опорную прямую вращать нельзя, т.к. это будет соответствовать отрицательному значению цены на второй вид продукции.

Первому крайнему положению опорной прямой соответствует отношение коэффициентов при переменных, равное $\frac{2}{3}$, второму – прямой $x_1 = \frac{12}{5}$ – $+\infty$, т.к. коэффициент при x_2 равен нулю. Таким образом, $\frac{2}{3} \le \frac{c_1}{c_2} < \infty$.

Если зафиксировать $c_1 = 3$, то получим

$$\frac{2}{3} \le \frac{3}{c_2} < +\infty \Rightarrow 0 < \frac{c_2}{3} \le \frac{3}{2} \Rightarrow 0 < c_2 \le 4{,}5.$$

Если зафиксировать $c_2 = 4$, то получим

$$\frac{2}{3} \le \frac{c_1}{4} < +\infty \Rightarrow \frac{8}{3} \le c_1 < +\infty.$$

§ 6. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Алгебраический симплекс-метод (пример)

В качестве примера решим следующую задачу:

$$\min\ z = -x_1 + x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Первый шаг.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_1 + 2x_2, \\ x_4 = 3 - x_1 - 3x_2. \end{cases} \tag{2}$$

Выразим целевую функцию через свободные переменные:

$$z = -x_1 + 1 - x_1 + 2x_2 = 1 - 2x_1 + 2x_2. \tag{3}$$

Базис $x_3 x_4$. Опорное решение $x^{(1)} = (0;\ 0;\ 1;\ 3)$, $z\left(x^{(1)}\right) = 1$.

1) Требуется определить, достигнут ли на этом опорном решении минимум целевой функции.

2) Если минимум не достигнут, то перейти к новому *опорному* решению так, чтобы значение целевой функции *не увеличилось*.

При переходе к новому опорному решению некоторая свободная переменная становится базисной, и ее значение становится неотрицательным.

Поскольку нам требуется, чтобы значение целевой функции не увеличилось, в состав базиса нужно ввести переменную с неположительным коэффициентом в выражении (3), т.е. переменную x_1.

Если таких переменных несколько, то можно выбрать любую из них.

Выберем переменную, которая выводится из базиса.

В выражении (2) переменная $x_2 = 0$, т.к. она свободная, т.е.

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_1, \\ x_4 = 3 - x_1. \end{cases}$$

И при этом должны выполняться два условия одновременно: $x_3 = 1 - x_1 \geq 0,\ x_4 = 3 - x_1 \geq 0.$

Если вывести из базиса переменную x_3, то x_1 будет равно 1, и второе условие $3 - x_1 \geq 0$ будет также выполняться. Если же вывести x_4, $x_1 = 3$ и первое условие не выполняется.

Значит, выводим x_3.

$$A = \left(\begin{array}{cccc:c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Второй шаг.

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad = 1, \\ \qquad 5x_2 - x_3 + x_4 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2 - x_3, \\ x_4 = 2 - 5x_2 + x_3. \end{cases} \tag{4}$$

Выразим целевую функцию через свободные переменные:

$$z = 1 - 2(1 + 2x_2 - x_3) + 2x_2 = -1 - 2x_2 + 2x_3. \tag{5}$$

Базис $x_1 x_4$. Опорное решение $x^{(2)} = (1;\ 0;\ 0;\ 2)$, $z\left(x^{(2)}\right) = -1$.

Поскольку нам требуется, чтобы значение целевой функции не увеличилось, в состав базиса нужно ввести переменную с неположительным коэффициентом в выражении (5), т.е. переменную x_2.

Выберем переменную, которая выводится из базиса.

В выражении (4) переменная $x_3 = 0$, т.к. она свободная, т.е.

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_4 = 2 - 5x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Если вывести из базиса переменную x_1, то x_2 примет отрицательное значение, что не допустимо. Значит, выводим из базиса x_4.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 \quad + \frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{9}{5}, \\ \quad x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{2}{5}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9}{5} - \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4, \\ x_2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4. \end{cases}$$

Выразим целевую функцию через свободные переменные:

$$z = -1 - 2\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4\right) + 2x_3 = -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4. \qquad (6)$$

Базис $x_1 x_2$. Опорное решение $x^{(3)} = \left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}; 0; 0\right)$, $z\left(x^{(3)}\right) = -\frac{9}{5}$.

Отрицательных коэффициентов при переменных в выражении (6) нет, значит дальнейшее уменьшение целевой функции невозможно.

Ответ. $z_{\min} = z\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}; 0; 0\right) = -\frac{9}{5}$.

Табличный симплекс-метод

Пусть дана задача линейного программирования в канонической форме, система ограничений которой является системой с единичным базисом и правые части всех уравнений неотрицательны.

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n);$$
$$b_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Обозначим базисные переменные, входящие в первое, …, i-е, …, последнее уравнения через $x_{1Б}$, …, $x_{iБ}$, …, $x_{mБ}$, соответственно, а коэффициенты при этих переменных в целевой функции – $c_{1Б}$, …, $c_{iБ}$, …, $c_{mБ}$.

Данные задачи запишем в виде таблицы. Она называется ***первой симплекс-таблицей*** (табл. 12).

Таблица 12

$c_{БАЗ}$	Базис	c_1	…	c_j	…	c_n	B
		x_1	…	x_j	…	x_n	
$c_{1Б}$	$x_{1Б}$	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1
…	…	…	…	…	…	…	…
$c_{iБ}$	$x_{iБ}$	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	b_i
…	…	…	…	…	…	…	…
$c_{mБ}$	$x_{mБ}$	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m
	z	Δ_1	…	Δ_j	…	Δ_n	Δ_0

Последняя строка таблицы называется ***индексной строкой***. Числа Δ_1, …, Δ_j, …, Δ_n называются ***оценками переменных*** x_1, …, x_j, …, x_n, соответственно. Вычисляются оценки по формуле

$$\Delta_j = c_{1Б}a_{1j} + \ldots + c_{iБ}a_{ij} + \ldots + c_{mБ}a_{mj} - c_j, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Оценки, соответствующие базисным переменным равны нулю.

Число Δ_0 равно значению целевой функции z на опорном решении, соответствующем базису $x_{1Б}$, …, $x_{iБ}$, …, $x_{mБ}$:

$$\Delta_0 = c_{1Б}b_1 + \ldots + c_{iБ}b_i + \ldots + c_{mБ}b_m.$$

Остальные симплексные таблицы, возникающие в процессе решения задачи симплекс-методом, имеют ту же структуру, что и первая таблица, но при их составлении можно отбросить шапку таблицы и первый столбец.

Пример. Для задачи $\min z = 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5$,

$$\begin{cases} 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 - x_2 + 4x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \; j = 1, 2, \ldots, 5.$$

составить первую симплексную таблицу.

Решение. Базисные переменные в этой системе: x_1, x_3, x_5. Заполним первую симплекс-таблицу (табл. 13).

Таблица 13

$c_{БАЗ}$	Базис	2	1	–1	2	1	B
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	x_5	0	2	0	–3	1	6
2	x_1	1	–1	0	4	0	5
–1	x_3	0	3	1	2	0	1
	z	0	– 4	0	1	0	15

Опорное решение, соответствующее этой таблице: $(5; 0; 1; 0; 6)$.

Условие оптимальности опорного решения. Если все оценки Δ_j $(j = 1, 2, ..., n)$, содержащиеся в индексной строке симплексной таблицы, неположительные, то опорное решение данной задачи является оптимальным, а значение Δ_0 равно наименьшему значению целевой функции на допустимом множестве.

Условие неограниченности целевой функции. Если в индексной строке симплексной таблицы содержится положительная оценка Δ_j, а в столбце переменной x_j нет ни одного положительного элемента, то целевая функция данной задачи не ограничена снизу на допустимом множестве.

Выбор ведущего элемента. Пусть оценка некоторой переменной $\Delta_j > 0$ и в столбце № j симплексной таблицы содержится, по крайней мере, один положительный элемент. В качестве ведущего столбца выберем столбец № j. Переменная x_j становится базисной.

Для каждого положительного элемента этого столбца вычислим отношение свободного члена, расположенного в той же строке, к этому элементу. Наименьшее из полученных частных будем обозначать через Θ и называть ключевым отношением для выбранной строки.

В качестве ведущей строки выберем строку, в которой достигается ключевое отношение. Переменная, соответствующая этой строке, выводится из базиса. На пересечении выбранной строки и выбранного столбца находится ведущий элемент для жорданова исключения.

Алгоритм симплекс-метода

1. Составить первую симплекс-таблицу.
2. Проверить опорное решение на оптимальность. Если условие оптимальности выполняется, то написать ответ.
3. Проверить задачу на неограниченность. Если условие неограниченности выполняется, то написать ответ.
4. Выбрать ведущий элемент, выполнить жорданово исключение, заполнить следующую симплекс-таблицу и перейти к пункту 2.

Пример. Решить задачу $\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_4 = 8, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 + 3x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Решение запишем в виде последовательности совмещенных друг с другом таблиц (табл. 14).

Таблица 14

$c_{БАЗ}$	Базис	1	1	1	1	B
		x_1	x_2	x_3	x_4	
1	x_1	1	$\boxed{2}$	0	1	8
1	x_3	0	1	1	3	6
	z	0	2	0	3	14
	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	4
	x_3	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\boxed{\frac{5}{2}}$	2
	z	–1	0	0	2	6
	x_2		1		0	$\frac{18}{5}$
	x_4	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{4}{5}$
	z	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{22}{5}$

Ответ. $z_{\min} = z\left(0; \frac{18}{5}; 0; \frac{4}{5}\right) = \frac{22}{5}$.

Пример. Решить задачу $\max\ z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду:

$$\min(-z) = -2x_1 - x_2 - 3x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение приведено в табл. 15.

Таблица 15

$c_{БАЗ}$	Базис	–2	–1	–3	0	B
		x_1	x_2	x_3	x_4	
–2	x_1	1	1	–1	0	0
0	x_4	0	2	–1	1	1
	$-z$	0	–1	5	0	0

Выполняется условие неограниченности целевой функции.

Ответ. $z_{\max} = +\infty$.

§ 7. Сокращенные симплекс-таблицы

Столбцы, соответствующие базисным переменным, можно исключить из симплекс-таблицы. Тогда ведущий столбец пересчитывается по правилу:

1) ведущий элемент заменяется обратным к нему;

2) все остальные элементы ведущего столбца делятся на ведущий и меняют знаки на противоположные.

Пример. Решите задачу $\max z = x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5$,

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Решение. Запишем задачу в канонической форме.

$$\min(-z) = -x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Решение записано в табл. 16–18.

Таблица 16

$c_{баз}$	Базис	x_1	x_2	B
		–1	6	
–2	x_3	–2	1	1
1	x_4	2	3	11
–3	x_5	$\boxed{1}$	–2	2
	$-z$	4	1	3

Таблица 17

Базис	x_5	x_2	B
x_3	2	–3	5
x_4	–2	$\boxed{7}$	7
x_1	1	–2	2
$-z$	–4	9	–5

Таблица 18

Базис	x_5	x_4	B
x_3	$\frac{8}{7}$	$\frac{3}{7}$	8
x_2	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	1
x_1	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	4
$-z$	$-\frac{10}{7}$	$-\frac{9}{7}$	–14

Ответ. $z_{\max} = z(4;\, 1;\, 8;\, 0;\, 0) = 14$.

§ 8. Метод искусственного базиса

Двухфазный симплекс-метод

Пусть дана задача в канонической форме, правые части всех ограничений неотрицательные. Для того, чтобы задачу можно было решать симплекс-методом, система должна содержать единичный базис. Этот базис можно получить с помощью последовательности жордановых исключений или с помощью введения искусственного базиса. Рассмотрим второй из этих способов.

Вспомогательная задача

1) Система ограничений вспомогательной задачи строится на основе системы ограничений основной задачи:

– уравнения, которые содержат базисную переменную, остаются без изменений;

– в уравнения, не содержащие базисных переменных, прибавляются искусственные базисные переменные $y_1, y_2, \ldots, y_k$.

2) Целевая функция S вспомогательной задачи равна сумме всех искусственных базисных переменных.

3) Требуется найти наименьшее значение целевой функции.

***Условие оптимальности решения основной задачи*:** если вспомогательная задача имеет оптимальное решение, у которого все искусственные переменные равны нулю, то основная задача имеет оптимальное решение, которое получается из оптимального решения вспомогательной задачи отбрасыванием искусственных переменных.

***Условие недопустимости основной задачи*:** если вспомогательная задача имеет оптимальное решение, у которого хотя бы одна искусственная переменная отлична от нуля, то основная задача не имеет решения из-за несовместности системы ограничений.

Условие неограниченности целевой функции основной задачи**:** если вспомогательная задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции, то основная задача не имеет решения по той же причине.

Алгоритм двухфазного симплекс-метода

I. Построение и решение вспомогательной задачи

Возможны следующие варианты.

а) $S_{\min} \neq 0$. Тогда основная задача является недопустимой и не имеет решения.

б) $S_{\min} = 0$ и среди базисных переменных завершающей симплексной таблицы есть хотя бы одна искусственная.

Вывести все искусственные базисные переменные из базиса, выполнив последовательность жордановых исключений.

в) $S_{\min} = 0$ и среди базисных переменных завершающей симплексной таблицы нет ни одной искусственной.

Тогда основная задача является допустимой.

II. Решение основной задачи

Заменив матрицу системы ограничений основной задачи на матрицу системы из завершающей симплекс-таблицы вспомогательной задачи, решить полученную задачу симплекс-методом.

Замечание. Для уменьшения объема вычислений при решении вспомогательной задачи после исключения из базиса любой искусственной переменной можно не заполнять соответствующий ей столбец полученных симплексных таблиц (место, где располагался этот столбец, будем показывать двойной вертикальной линией).

Пример. Решите задачу методом искусственного базиса:

$$\min z = 2x_1 - x_2 + 4x_3,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Решение. Приведем задачу к канонической форме – введем дополнительные переменные:

$$\min z = 2x_1 - x_2 + 4x_3,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \phantom{{}-x_5} = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} - x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, ..., 5.$$

Составим вспомогательную задачу:

$$\min S = y_1,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 + y_1 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., 5;\ y_1 \geq 0.$$

Решим эту задачу симплекс-методом (табл. 19).

Таблица 19

$c_{БАЗ}$	Базис	0	0	0	0	0	1	В
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	
0	x_4	2	$\boxed{3}$	1	1	0	0	3
1	y_1	1	2	–1	0	–1	1	4
	S	1	2	–1	0	–1	0	4
	x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1
	y_1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	–1	1	2
	S	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	–1	0	2

$S_{\min} = 2 \neq 0$, значит, исходная задача недопустимая.

Пример. Решите задачу методом искусственного базиса:

$$\min z = 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + x_4 + 4x_5,$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3, \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., 5.$$

Решение. Данная задача записана в канонической форме. Составим вспомогательную задачу:

$$\min S = y_1 + y_2,$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3, \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + y_1 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + y_2 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., 5;\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

Решим эту задачу симплекс-методом (табл. 20–22).

Таблица 20

$c_{БАЗ}$	Базис	0	0	0	0	B
		x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_1	–4	2	–5	9	3
1	y_1	1	–3	4	–5	6
1	y_2	1	–1	$\boxed{1}$	–1	1
	S	2	–4	5	–6	7

Таблица 21

Базис	x_2	x_3	x_5	B
x_1	1	–3	9	8
y_1	–3	$\boxed{1}$	–1	2
x_4	1	–1	–1	1
S	–3	1	–1	2

Таблица 22

Базис	x_2	x_5	B
x_1	–8	1	14
x_3	–3	–1	2
x_4	–2	–2	3
S	0	0	0

$S_{\min} = 0$, значит, основная задача допустимая. Решим ее симплекс-методом (табл. 23, 24).

Таблица 23

$c_{БАЗ}$	Базис	x_2	x_5	B
		6	4	
2	x_1	–8	$\boxed{1}$	14
–5	x_3	–3	–1	2
1	x_4	–2	–2	3
	z	–9	1	21

Таблица 24

Базис	x_2	x_1	B
	6	2	
x_5	–8	1	14
x_3	–11	1	16
x_4	–18	2	31
z	–1	–1	7

Ответ. $z_{\min} = z(0;\ 0;\ 16;\ 31;\ 14) = 7$.

М-метод

Расширенная задача

1) Система ограничений расширенной задачи строится так же, как система ограничений вспомогательной задачи.

2) Целевая функция $\bar{z}$ вспомогательной задачи равна сумме целевой функции основной задачи и всех искусственных базисных переменных с коэффициентом M. Число M сколь угодно большое число ($M >> 1$).

3) Требуется найти наименьшее значение целевой функции.

Замечания.

1. Оценки Δ_k имеют вид $\Delta'_k + M \cdot \Delta''_k$. Индексная строка разбивается на две – в первую записывают Δ'_k, во вторую – Δ''_k.

2. Так как M сколь угодно велико, поэтому на первом этапе расчета для нахождения векторов, вводимых в базис, используем только Δ''_k.

3. Соответствующие искусственным переменным векторы, выводимые из базиса опорного решения, в дальнейшем исключаются из рассмотрения.

4. После того как все векторы, соответствующие искусственным переменным, исключатся из базиса, расчет продолжается обычным симплекс-методом с использованием оценок Δ'_k.

Пример. Решить задачу М-методом:

$$\min\ z = 7x_1 - 13x_2 - 8x_3 + 10x_4,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Решение. Задача записана в канонической форме. Составим расширенную задачу:

$$\min\ \bar{z} = 7x_1 - 13x_2 - 8x_3 + 10x_4 + My_1 + My_2,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 + y_1 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + y_2 = 2, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ y_j \geq 0,\ j = 1,\ 2.$$

Вычислим оценки переменных и значение целевой функции.

$$\Delta_1 = 1 \cdot M + 1 \cdot M - 7 = 2M - 7,\ \Delta_2 = -1 \cdot M + (-2) \cdot M - (-13) = -3M + 13,$$

$$\Delta_3 = -3 \cdot M + (-1) \cdot M - (-8) = -4M + 8,\ \Delta_4 = 2 \cdot M + 1 \cdot M - 10 = 3M - 10,$$

$$\Delta_0 = 3 \cdot M + 2 \cdot M = 5M.$$

Результаты и процесс решения приведены в табл. 25–27.

Таблица 25

$c_{БАЗ}$	Базис	7	–13	–8	10	В
		x_1	x_2	x_3	x_4	
M	y_1	1	–1	–3	2	3
M	y_2	$\boxed{1}$	–2	–1	1	2
	z	–7	13	8	–10	0
	M	2	–3	–4	3	5

Таблица 26

Базис	x_2	x_3	x_4	В
y_1	$\boxed{1}$	–2	1	1
x_1	–2	–1	1	2
z	–1	1	–3	14
M	1	–2	1	1

Таблица 27

Базис	x_3	x_4	В
x_2	–2	1	1
x_1	–5	3	4
z	–1	–2	15
M	0	0	0

Ответ. $z_{\min} = z(4; 1; 0; 0) = 15$.

Глава 2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

§ 1. Экономический смысл двойственности

Рассмотрим задачу об использовании ресурсов. Пусть имеется m видов ресурсов, запасы которых составляют $b_1, b_2, ..., b_m$ единиц, соответственно. На основе этих ресурсов производится n видов продукции. Стоимость единицы каждого вида продукции равна $c_1, c_2, ..., c_n$ ден. ед., соответственно.

Известно также, что на производство одной единицы продукции j-го вида $(j = 1, ..., n)$ расходуется a_{ij} ед. i-го вида ресурса $(i = 1, ..., m)$.

Составим математическую модель этой задачи. Обозначим через x_j – количество произведенной продукции j-го вида (ед.). Тогда i-го ресурса будет израсходовано $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ (ед.), что не должно превышать запасов этого ресурса b_i. Получаем систему ограничений задачи. Целевая функция z – общая стоимость всей произведенной продукции.

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\ ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\ i=1,\ ...,\ m\,,$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,\ ...,\ n\,.$$

Предположим, что производитель продукции решил оценить полезность используемых им ресурсов. Обозначим через y_i условную полезность ресурса №i, т.н. «теневую» или внутреннюю его цену. Очевидно $y_i\ge 0,\ i=1,\ 2,\ ...,\ n.$

Суммарная внутренняя оценка всех ресурсов, которые расходуются на производство единицы продукции № j, равна $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i$. Суммарная ценность всех имеющихся ресурсов $f=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i$.

Требуется минимизировать эту ценность, выполнив условие: суммарная оценка всех ресурсов, которые расходуются на производство единицы продукции каждого вида, должна быть не меньше стоимости единицы этого вида продукции. Получаем задачу

$$\min\ f=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j,\ j=1,...,\ n\,,$$

$$y_i\ge 0,\ i=1,\ ...,\ m.$$

Она называется двойственной к задаче об использовании ресурсов, сформулированной выше.

Пример. Для производства трех видов изделий А, В и С используется три различных вида сырья. Данные по нормам затрат и ценам приведены в табл. 28. Каждый из видов сырья может быть использован в количестве не большем 180, 210 и 244 кг, соответственно.

Таблица 28

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на ед. продукции		
	А	В	С
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена ед. продукции (руб.)	10	14	12

Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается максимальная прибыль, и оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции.

Решение. Предположим, что производится x_1 изделий А, x_2 изделий В и x_3 изделий С. Для определения оптимального плана производства нужно решить задачу

$$\max\ z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases},$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Припишем каждому из видов сырья, используемых для производства продукции, двойственную оценку, соответственно равную y_1, y_2 и y_3.

Получаем задачу:

$$\min\ f = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3,$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 12, \end{cases},$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

Решение прямой задачи дает оптимальный план производства изделий А, В и С, а решение двойственной оптимальную систему оценок сырья, используемого для производства этих изделий. Оптимальным планом производства изделий является такой, при котором изготавливается 82 изделия В и 16 изделий С. При данном плане производства остается неиспользованным 80 кг сырья II вида, а общая стоимость изделий равна 1340 руб. Оптимальным решением двойственной задачи является: $\left(\frac{23}{4};\ 0;\ \frac{5}{4}\right)$.

Переменные y_1^* и y_3^* обозначают условные двойственные оценки единицы сырья соответственно I и III. Эти оценки отличны от нуля, а сырье I и III полностью используется при оптимальном плане производства продукции. Двойственная оценка единицы сырья II равна нулю. Этот вид сырья не полностью используется при оптимальном плане производства продукции.

Двойственные оценки характеризуют дефицитность ресурсов. Величина y_i в оптимальном решении двойственной задачи является оценкой i-го ресурса; чем больше значение оценки y_i, тем выше дефицитность ресурса. Для недефицитного ресурса $y_i = 0$. Таким образом, положительную двойственную оценку имеют лишь те виды сырья, которые полностью используются при оптимальном плане производства изделий. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность используемого предприятием сырья. Более того, величина данной двойственной оценки показывает, на сколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества сырья соответствующего вида на 1 кг.

Так, увеличение количества сырья I на 1 кг приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет на 5,75 руб. и станет равной 1340 + 5,75 = 1345,75 руб. Точно так же, увеличение на 1 кг сырья III вида позволит найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет на 1,25 руб. и составит 1340 + 1,25 = 1341,25 руб.

При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи получаем

$$23 + 5/4 > 10,$$
$$23/2 + 5/2 = 14,$$
$$23/4 + 25/4 = 12.$$

Первое ограничение двойственной задачи выполняется как строгое неравенство. Это означает, что двойственная оценка сырья, используемого на производство одного изделия вида А, выше цены этого изделия и, следовательно, выпускать изделия вида А невыгодно. Его производство не предусмотрено оптимальным планом прямой задачи.

Второе и третье ограничения двойственной задачи являются равенствами. Это означает, что двойственные оценки сырья, используемого для производства единицы соответственно изделий В и С, равны в точности их ценам. Поэтому выпускать эти два вида продукции по двойственным оценкам экономически целесообразно. Их производство предусмотрено оптимальным планом прямой задачи.

§ 2. Правила построения двойственной задачи

Двойственную задачу можно составить не только для задачи об использовании ресурсов. Прямую задачу нужно привести в соответствие с условием:

а) если в ней требуется найти минимум целевой функции, то все ограничения-неравенства должны быть со знаком «≥»;

б) если требуется найти максимум целевой функции, то все ограничения-неравенства должны быть со знаком «≤».

Далее следуем правилам.

1. Если прямая задача на нахождение минимума целевой функции, то двойственная – на нахождение максимума, и наоборот.

2. Каждому ограничению-неравенству прямой задачи соответствует неотрицательная переменная двойственной задачи.

3. Каждому ограничению-уравнению прямой задачи соответствует переменная произвольного знака двойственной задачи.

4. Каждой неотрицательной переменной прямой задачи соответствует ограничение-неравенство двойственной задачи.

5. Каждой переменной произвольного знака прямой задачи соответствует ограничение-уравнение двойственной задачи.

6. Матрица системы ограничений двойственной задачи транспонирована по отношению к матрице системы ограничений прямой задачи.

7. Правые части ограничений двойственной задачи равны коэффициентам при переменных целевой функции прямой задачи.

8. Коэффициенты при переменных целевой функции двойственной задачи равны правым частям ограничений прямой задачи.

9. В двойственной задаче должно выполняться условие:

а) если требуется найти минимум целевой функции, то все ограничения-неравенства должны быть со знаком «≥»;

б) если требуется найти максимум целевой функции, то все ограничения-неравенства должны быть со знаком «≤».

Пример. Составить задачу, двойственную к данной:

$$\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение. Т.к. задача на нахождение максимума, значит, все неравенства должны быть со знаком «≤»: $3x_1 - x_2 + 5x_3 \ge 1 \Leftrightarrow -3x_1 + x_2 - 5x_3 \le -1$.

Прямая задача	Двойственная задача
$\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3,$	$\min f = 10y_1 + 8y_2 - y_3,$
$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 \le -1, \end{cases}$	$y_1 \ge 0,$ $y_2 \forall,$ $y_3 \ge 0.$
$x_1 \ge 0,$ $x_2 \ge 0,$ $x_3 \forall.$	$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 3y_3 \ge 5, \\ 6y_1 - y_2 + y_3 \ge 12, \\ y_1 + 3y_2 - 5y_3 = 4, \end{cases}$

Соответствующие условия прямой и двойственной задач называются ***сопряженными условиями***.

§ 3. Свойства двойственных задач (теоремы двойственности)

1) ***Первая теорема двойственности***. Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций двойственных задач равны.

2) Если одна из двойственных задач не имеет решения из-за неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то другая задача не имеет допустимых решений (не допустима).

3) ***Вторая теорема двойственности***. Для того чтобы допустимые решения $\overline{x}$ и $\overline{y}$ прямой и двойственной задач соответственно были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы при подстановке их в системы ограничений в каждой паре сопряженных условий строгому неравенству в ограничениях одной задачи соответствовало бы равенство в ограничениях другой.

Из этой теоремы следует, что если какое-либо ограничение одной из задач на оптимальном решении обращается в строгое неравенство, то соответствующая компонента оптимального плана двойственной задачи должна равняться нулю.

Если же какая-либо компонента оптимального плана положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задаче на ее оптимальном решении должно обращаться в строгое неравенство:

Пример. Исследовать на оптимальность допустимое решение $\overline{x} = (2,\ 2,\ 0)$ задачи

$$\min z = 2x_1 + x_2 - 3x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Решение. Т.к. задача на нахождение минимума, значит, все неравенства должны быть со знаком «≥»:

$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \Leftrightarrow -2x_1 + x_2 - x_3 \ge -2.$$

Прямая задача	Двойственная задача
$\min z = 2x_1 + x_2 - 3x_3,$	$\max f = 6y_1 - y_2 - 2y_3,$
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -1, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \geq -2, \end{cases}$	$y_1 \forall,$ $y_2 \geq 0,$ $y_3 \geq 0.$
$x_1 \geq 0,$ $x_2 \geq 0,$ $x_3 \forall.$	$\begin{cases} y_1 + y_2 - 2y_3 \leq 2, \\ 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 1, \\ y_1 + 2y_2 - y_3 = -3, \end{cases}$

Подставим координаты данного решения $\bar{x} = (2,\ 2,\ 0)$ в ограничения исходной задачи. В скобках указан получившийся знак.

$$\min z = 2x_1 + x_2 - 3x_3, \qquad \max f = 6y_1 - y_2 - 2y_3,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, & \\ 2 - 2 + 2\cdot 0 \geq -1, & (>) \longrightarrow y_2 \geq 0, \\ -2\cdot 2 + 2 - 0 \geq -2, & (=) \quad y_3 \geq 0, \end{cases} \qquad y_1 \forall,$$

$$2 \geq 0, \quad (>) \longrightarrow \; y_1 + y_2 - 2y_3 \leq 2,$$

$$2 \geq 0, \quad (>) \longrightarrow \; 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 1,$$

$$x_3 \forall. \qquad y_1 + 2y_2 - y_3 = -3.$$

Выпишем условия из системы ограничений двойственной задачи, соответствующие строгим знакам в прямой задаче, со знаком «равно». И добавим к ним третье уравнение из системы ограничений двойственной задачи.

$$\begin{cases} y_2 = 0, \\ y_1 + y_2 - 2y_3 = 2, \\ 2y_1 - y_2 + y_3 = 1, \\ y_1 + 2y_2 - y_3 = -3. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений. Значит, данное решение $\bar{x} = (2,\ 2,\ 0)$ исходной задачи не является оптимальным.

Пример. Для данной задачи

$$\min z = 2x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

составить двойственную задачу и, решив одну из взаимно-двойственных задач, найти решение другой.

Решение.

Прямая задача	Двойственная задача
$\min z = 2x_1 + 4x_2,$	$\max\ f = y_1 - 3y_2,$
$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3, \end{cases}$	$y_1 \ge 0,$ $y_2 \forall,$
$x_1 \ge 0,$ $x_2 \ge 0,$ $x_3 \ge 0.$	$\begin{cases} -y_1 + y_2 \le 2, \\ 2y_1 + y_2 \le 4, \\ -y_1 - y_2 \le 0. \end{cases}$

Решим двойственную задачу графически (рис. 7).

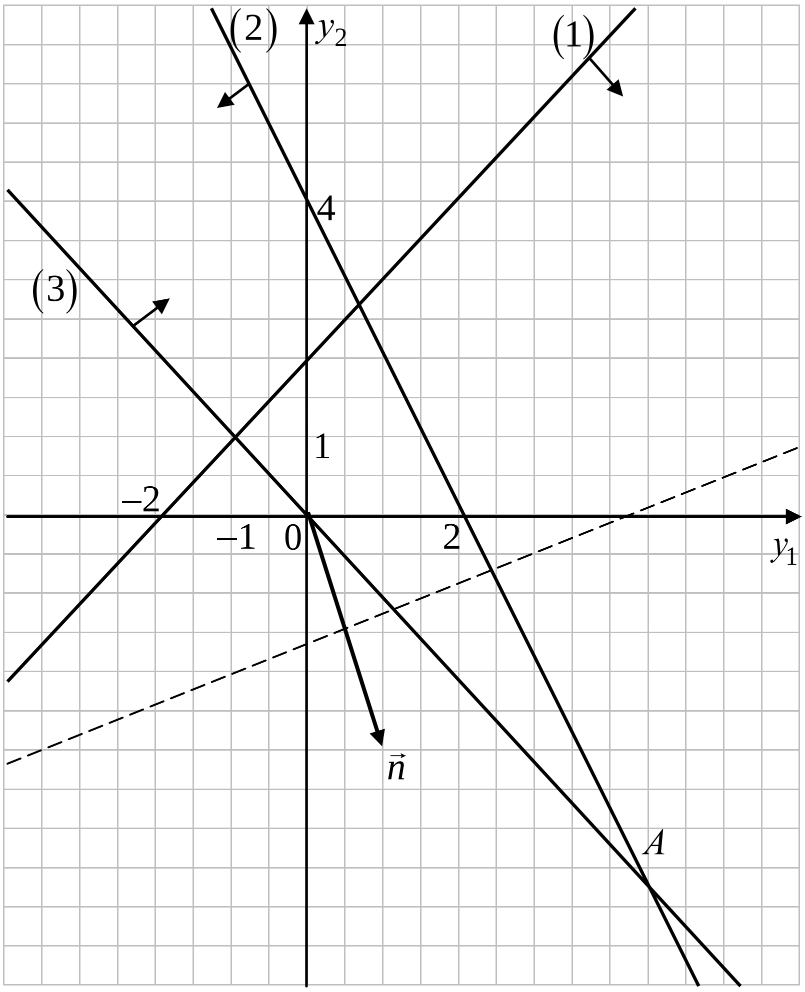

Рис. 7

Координаты точки максимума $A(4; -4)$ найдены из системы

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 4, \\ -y_1 - y_2 = 0. \end{cases}$$

Подставим эти координаты в ограничения-неравенства двойственной задачи и определим, какой знак при этом получается – строгий знак неравенства или знак равенства.

Строгим знакам неравенств соответствуют уравнения в сопряженных условиях исходной задачи. Составим из них систему и добавим уравнение из исходной задачи.

$$
\begin{array}{lcl}
\min z = 2x_1+4x_2, & & \max f = y_1-3y_2,\\
\left\{\begin{array}{l} -x_1+2x_2-x_3\ge 1, \\ x_1+x_2-x_3=-3, \end{array}\right. & \begin{array}{r}\longleftarrow (>)\\ \end{array} & \begin{array}{l} 4\ge 0,\\ y_2\forall, \end{array}\\
\begin{array}{l} x_1\ge 0,\\ x_2\ge 0,\\ x_3\ge 0.\end{array} & \begin{array}{r}\longleftarrow (<)\\ (=)\\ (=)\end{array} & \left\{\begin{array}{l} -4+(-4)\le 2,\\ 2\cdot 4+(-4)\le 4,\\ -4-(-4)\le 0.\end{array}\right.
\end{array}
$$

$$
\begin{cases} -x_1+2x_2-x_3=1, \\ x_1=0, \\ x_1+x_2-x_3=-3. \end{cases}
$$

Решение этой системы – оптимальное решение исходной задачи: $(0;\ 4;\ 7)$.

Ответ. $z_{\min} = z(0;\ 4;\ 7) = 16$.

§ 4. Двойственный симплекс-метод

Двойственный симплекс-метод, как и симплекс-метод, используется для решения канонической задачи, система ограничений которой является системой с единичным базисом. Различие лишь в том, что свободные члены ограничений задачи, решаемой двойственным симплекс-методом, могут быть любыми числами (при применении симплекс-метода эти числа неотрицательны).

Оба этих метода заключаются в последовательном переходе от одного базисного решения системы ограничений к другому, так, что через конечное число переходов либо получается оптимальное решение рассматриваемой задачи, либо устанавливается ее неразрешимость. Однако, в отличие от симплекс-метода эти последовательно получаемые базисные решения не обязательно являются опорными.

Определение. Пусть дана каноническая задача, система ограничений которой является системой с единичным базисом. Базисное решение системы ограничений, соответствующее этому базису, будем называть *псевдооптимальным решением*, если оценки всех переменных неположительны.

Пример. Проверить, является ли псевдооптимальным решением базисное решение системы ограничений задачи

$$\min z = x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4,$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \quad - 3x_4 = -2, \\ -x_1 \qquad + x_3 + x_4 = -1, \end{cases}$$
$$x_k \geq 0,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Решение. Для ответа на поставленный вопрос нужно найти оценки всех переменных. Составим первую симплекс-таблицу (табл. 29).

Таблица 29

$c_{БАЗ}$	базис	1	–3	B
		x_1	x_4	
2	x_2	–3	–3	–2
1	x_3	–1	1	–1
	z	–8	–2	–5

Т.к. $\Delta_k \leq 0$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, то соответствующее таблице базисное решение $\bar{x} = (0,\ -2,\ -1,\ 0)$ псевдооптимальное.

Очевидно, что если все координаты псевдооптимального решения неотрицательны, то оно является оптимальным решением рассматриваемой задачи.

Алгоритм двойственного симплекс-метода

Пусть дана каноническая задача, у которой система ограничений является системой с единичным базисом, а базисное решение является псевдооптимальным решением. Двойственный симплекс-метод решения такой задачи состоит из следующих этапов:

1. Составление первой симплексной таблицы.

2. Проверка псевдооптимального решения на оптимальность.

Если все координаты псевдооптимального решения неотрицательны, то оно является оптимальным решением данной задачи.

3. Проверка задачи на допустимость.

Если в столбце B симплекс-таблицы содержится отрицательное число такое, что в той же строке нет ни одного отрицательного элемента, то данная задача является недопустимой.

4. Улучшение псевдооптимального решения.

Если условия пунктов 2 и 3 данного алгоритма не выполнены, то переходим к новой симплекс-таблице, соответствующей равносильной системе ограничений с другим набором базисных переменных и новым псевдооптимальным решением.

а) Выбираем переменную, выводимую из числа базисных. Это переменная, в строке которой содержится наибольший по абсолютной величине отрицательный элемент столбца свободных членов.

б) Выбираем переменную, вводимую в число базисных. Для этого выделяем в выбранной строке все отрицательные коэффициенты системы ограничений и для каждого из них ищем частное от деления соответствующей оценки на этот коэффициент. Столбец, в котором получено наименьшее из вычисленных значений (ключевое отношение), соответствует переменной, вводимой в число базисных.

в) Выполняя жорданово исключение с ведущим элементом, расположенным на пересечении выбранных строки и столбца, переходим к новой симплекс-таблице и повторяем все действия, начиная с этапа 2 данного алгоритма.

Пример. Решить задачу $\min z = 2x_1 + 2x_2 + x_3$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + x_4 = -1, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6, \end{cases}$$

$$x_k \geq 0,\ k = 1, \ldots, 5.$$

Решение. Поскольку система ограничений данной канонической задачи является системой с единичным базисом, мы можем составить первую симплексную таблицу (табл. 30).

Таблица 30

$c_{БАЗ}$	Базис	2	2	B
		x_1	x_2	
1	x_3	1	1	8
0	x_4	1	–1	–1
0	x_5	–1	$\boxed{-2}$	–6
	z	–1	–1	8

Оценки, расположенные в индексной строке таблицы, неположительны. Следовательно, базисное решение $\overline{x} = (0,\ 0,\ 8,\ -1,\ -6)$ является псевдооптимальным решением и для решения данной задачи можно применить двойственный симплекс-метод.

Так как в столбце B имеются два отрицательных числа (-1 и -6) и в соответствующих им строках содержатся отрицательные элементы, то в соответствии с алгоритмом двойственного симплекс-метода переходим к новой симплекс-таблице.

Переменная, исключаемая из числа базисных, определяется наибольшим по модулю отрицательным числом из столбца B. В данном случае это число -6. Следовательно, из числа базисных исключаем переменную x_5. Чтобы определить переменную, вводимую в число базисных, находим ключевое отношение для строки переменной x_5. Это отношение $\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$ достигается в столбце переменной x_2.

Значит, переменную x_2 вводим в число базисных. Выполняя жорданово исключение, переходим к новой симплекс-таблице (табл. 31).

Таблица 31

Базис	x_1	x_2	x_5	B
x_3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5
x_4	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	3
z	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	11

Так как в столбце B таблицы нет отрицательных чисел, значит

$$z_{\min}=z(0;\ 3;\ 5;\ 2;\ 0)=11.$$

В этом примере использование двойственного симплекс-метода позволило избежать применения искусственных переменных. В общем же случае для решения канонической задачи двойственным симплекс-методом необходимо сначала при помощи специальных методов преобразовать систему ограничений к виду, определяющему одно из псевдооптимальных решений данной задачи. Однако имеется целый ряд стандартных ситуаций, в которых для применения двойственного симплекс-метода не требуется никаких предварительных преобразований.

Пример. Решить задачу

$$\min\ z=2x_1+15x_2+6x_3,$$
$$\begin{cases}-x_1+3x_2-x_3\ge 5,\\ 3x_1+\ \ x_2+2x_3\ge 12,\\ \ x_1+\ \ x_2+\ \ x_3\ge 15,\end{cases}$$
$$x_k\ge 0,\ k=1,\ 2,\ 3.$$

Решение. Приведём задачу к канонической форме:

$$\min\ z=2x_1+15x_2+6x_3,$$
$$\begin{cases}-x_1+3x_2-x_3-x_4=5,\\ 3x_1+\ \ x_2+2x_3-x_5=12,\\ \ x_1+\ \ x_2+\ \ x_3-x_6=15,\end{cases}$$
$$x_k\ge 0,\ k=1,\ \ldots,\ 6.$$

Умножим обе части всех уравнений на –1, для того, чтобы в системе был единичный базис:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -5, \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = -12, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = -15. \end{cases}$$

Далее решим задачу двойственным симплекс-методом (табл. 32–34).

Таблица 32

$c_{БАЗ}$	Базис	2	15	6	B
		x_1	x_2	x_3	
0	x_4	1	–3	1	–5
0	x_5	–3	–1	–2	–12
0	x_6	$\boxed{-1}$	–1	–1	–15
	z	–2	–15	–6	0

Таблица 33

Базис	x_6	x_2	x_3	B
x_4	1	$\boxed{-4}$	0	–20
x_5	–3	2	1	33
x_1	–1	1	1	15
z	–2	–13	–4	30

Таблица 34

Базис	x_6	x_4	x_3	B
x_2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	5
x_5	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	23
x_1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	10
z	$-\frac{21}{4}$	$-\frac{13}{4}$	–4	95

Ответ. $z_{\min} = z(10;\, 5;\, 0;\, 0;\, 23;\, 0) = 95$.

Пример. Решить задачу

$$\min\ z = 2x_1 + 5x_2 + x_3,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 12, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \ge 3, \end{cases}$$
$$x_k \ge 0,\ k = 1,\, 2,\, 3.$$

Решение. Приведём задачу к канонической форме:

$$\min\ z = 2x_1 + 5x_2 + x_3,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 12, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_6 = 3, \end{cases}$$
$$x_k \geq 0,\ k = 1, \ldots, 6.$$

Умножим обе части первого и третьего уравнений на –1, для того, чтобы в системе был единичный базис:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = -3. \end{cases}$$

Далее решим задачу двойственным симплекс-методом (табл. 35–37).

Таблица 35

$c_{БАЗ}$	Базис	2	5	1	B
		x_1	x_2	x_3	
0	x_4	1	–1	$\boxed{-1}$	–6
0	x_5	3	2	–2	12
0	x_6	–1	2	3	–3
	z	–2	–5	–1	0

Таблица 36

Базис	x_1	x_2	x_4	B
x_3	–1	1	–1	6
x_5	1	4	–2	24
x_6	2	$\boxed{-1}$	3	–21
z	–3	–4	–1	6

Таблица 37

Базис	x_1	x_6	x_4	B
x_3	1	1	2	–15
x_5	9	4	10	–60
x_2	–2	–1	–3	21
z	–11	–4	–13	90

Ответ. Задача недопустимая.

Глава 3. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 1. Основные понятия

Рассмотрим каноническую задачу. Потребуем дополнительно, чтобы переменные задачи x_k принимали только целые значения.

Требование целочисленности может быть наложено лишь только на некоторые переменные задачи. Соответственно будем различать полностью и частично целочисленные задачи.

Пусть X – оптимальное решение задачи (без условия целочисленности переменных), не являющееся целочисленным.

Неравенство $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \geq \beta$ называется ***правильным отсечением***, если оно удовлетворяет следующим условиям:

а) для вектора X это неравенство не выполняется;

б) любое целочисленное допустимое решение удовлетворяет этому неравенству.

Добавление такого неравенства к системе ограничений задачи сужает ее допустимое множество, сохраняя при этом все его целочисленные точки.

Идея методов отсечения состоит в следующем.

На первом этапе решается задача, получающаяся из данной целочисленной задачи отбрасыванием требования целочисленности переменных. Если найденное решение X_1 целочисленно, то оно является решением исходной целочисленной задачи. Если нет, то к системе ограничений задачи добавляется правильное отсечение, которое «отсекает» точку X_1 и сохраняет в допустимом множестве все целочисленные решения исходной задачи.

На втором этапе находится решение X_2 задачи с дополнительно введенным ограничением. Если точка X_2 не является целочисленной, то вводится новое правильное отсечение и т.д. до тех пор, пока решение очередной задачи не будет удовлетворять требованию целочисленности.

Конкретные алгоритмы различных методов отсечения определяются конкретными способами построения правильных отсечений. Наиболее известны алгоритмы Гомори и их модификации.

Методы отсечения позволяют использовать для решения целочисленных задач обычные методы линейного программирования. К недостаткам методов отсечения относятся необходимость учета все большего числа ограничений и чувствительность к ошибкам округления.

§ 2. Построение правильного отсечения методом Го́мори

Как известно, целой частью действительного числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a. Дробной частью числа a называется разность между этим числом и его целой частью. Целая и дробная части числа a обозначаются соответственно $[a]$ и $\{a\}$.

Для любого действительного числа a $0 \le \{a\} < 1$ и $a = [a] + \{a\}$.

Например, $[5{,}3] = 5$, $\{5{,}3\} = 5{,}3 - [5{,}3] = 0{,}3$, $[-1{,}6] = -2$, $\{-1{,}6\} = -1{,}6 - [-1{,}6] = 0{,}4$.

Пусть в последней симплекс-таблице некоторая строка имеет вид

a_{k1}	a_{k2}	$\dots$	a_{kn}	b_k

Причем b_k – дробное число.

По этой строке записываем правильное отсечение:

$$\{a_{k1}\}x_1 + \{a_{k2}\}x_2 + \ldots + \{a_{kn}\}x_n \ge \{b_k\}.$$

Вводя неотрицательную дополнительную переменную x_{n+1}, преобразуем неравенство в равенство. Изменяя знак у обеих частей полученного равенства так, чтобы новая переменная x_{n+1} входила в него с коэффициентом 1, приведем его к виду

$$-\{a_{k1}\}x_1 - \{a_{k2}\}x_2 - \ldots - \{a_{kn}\}x_n + x_{n+1} = -\{b_k\}.$$

§ 3. Алгоритм метода Го́мори

Пусть дана полностью целочисленная задача. Процесс ее решения методом Гомори включает следующие этапы:

1. Используя симплекс-метод, находим решение исходной задачи без учета требования целочисленности переменных.
2. Если все элементы столбца B последней симплексной таблицы – целые числа, то опорное решение, построенный по этой таблице, является оптимальным решением исходной целочисленной задачи.
3. Если же в столбце B последней таблицы содержатся нецелые числа, то выбираем среди них компоненту с наименьшим порядковым номером и по соответствующей строке симплекс-таблицы строим правильное отсечение. Добавляем строку и, возможно, столбец в таблицу.
4. Используя двойственный симплекс-метод, находим оптимальное решение задачи, получающейся из решенной нецелочисленной задачи в результате добавления к ее системе ограничений построенного равенства. Исходная для применения двойственного симплекс-метода таблица получается из завершающей симплексной таблицы предыдущего этапа добавлением к ней строки, соответствующей ограничению, и столбца новой

базисной переменной x_{n+1}. Решив полученную задачу, возвращаемся к этапу 2 данного алгоритма.

Замечание. Можно доказать, что если у полностью целочисленной задачи, у которой все коэффициенты в целевой функции – целые числа, а допустимое множество (без условия целочисленности) ограничено, то описанный алгоритм приводит к оптимальному решению этой задачи за конечное число шагов.

Пример. Решить задачу $\min z = -3x_1 - x_2$,

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 5, \\ \qquad\quad x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \text{целые}.$$

Решение. Применяя симплекс-метод, решаем сначала данную задачу без учета требования целочисленности переменных. Для этого преобразуем её к канонической форме

$$\min z = -3x_1 - x_2,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \quad = 5, \\ \qquad\quad x_2 \qquad + x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_k \ge 0,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

и найдем симплекс-методом ее решение (табл. 38, 39).

Таблица 38

$c_{БАЗ}$	Базис	–3	–1	B
		x_1	x_2	
0	x_3	$\boxed{4}$	1	5
0	x_4	0	1	2
	z	3	1	0

Таблица 39

Базис	x_3	x_2	B
x_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
x_4	0	$\boxed{1}$	2
z	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{15}{4}$

В столбце B завершающей симплексной таблицы есть нецелое число. Поэтому нужно перейти к новой задаче, добавив к системе ограничений задачи правильное отсечение, построенное по выделенной строке: (табл.40) $\left\{\frac{1}{4}\right\}x_3+\left\{-\frac{1}{4}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{3}{4}\right\}$, $\frac{1}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4 \geq \frac{3}{4}$.

Таблица 40

Базис	x_3	x_4	B
x_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
x_2	0	1	2
z	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{17}{4}$

Преобразовав это неравенство к виду $-\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4+x_5=-\frac{3}{4}$, добавим соответствующую строку в симплекс-таблицу (табл. 41).

Таблица 41

Базис	x_3	x_4	B
x_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
x_2	0	1	2
x_5	$-\frac{1}{4}$	$\boxed{-\frac{3}{4}}$	$-\frac{3}{4}$
z	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{17}{4}$

Применяя двойственный симплекс-метод, получаем следующую таблицу (табл. 42).

Таблица 42

Базис	x_3	x_5	B
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1
x_4	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1
z	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	–4

Так как все элементы столбца B в последней таблице – целые числа, значит, получено оптимальное решение исходной задачи. Таким образом, для данной целочисленной задачи $z_{\min}=z(1;\,1;\,0)=-4$.

Глава 4. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

§ 1. Постановка транспортной задачи

Симплекс-метод является универсальным методом решения задач линейного программирования, но число его итераций, необходимых для нахождения оптимального плана, может быть большим. Вместе с тем многие широко распространенные на практике классы задач линейного программирования имеют особенности, которые позволяют получить для них принципиально новые методы решения. К таким задачам относится, в частности, транспортная задача, которая формулируется следующим образом.

Пусть m поставщиков располагают a_i $(i=1, 2, ..., m)$ единицами некоторой продукции, которая должна быть доставлена n потребителям в количествах b_j $(j=1, 2, ..., n)$. Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы продукции от i-го поставщика к j-му потребителю. Требуется установить такие объемы перевозок x_{ij} от каждого поставщика к каждому потребителю, чтобы суммарные затраты на перевозки были наименьшими и потребности всех потребителей были бы удовлетворены (если только общий объем возможных поставок покрывает объем потребностей).

Очевидно, что общий объем возможных поставок продукции равен $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i$, а объем потребностей – $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. Если выполняется равенство $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, т.е. сумма возможных поставок в точности равна сумме потребностей, то соответствующая транспортная задача называется задачей с правильным балансом, а её модель – закрытой. Если же это равенство не выполняется, то говорят о задаче с неправильным балансом или об открытой модели транспортной задачи.

Обычно условие закрытой транспортной задачи записывают в виде транспортной таблицы. Каждая клетка этой таблицы соответствует определенной паре поставщик-потребитель.

В левый верхний угол каждой клетки заносится стоимость перевозки единицы продукции c_{ij} по соответствующему маршруту, а в правый нижний угол – объем соответствующей перевозки x_{ij} (табл. 43).

Таблица 43

c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…
c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…
c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	…	b_j	…	b_n	

Составим математическую модель транспортной задачи с правильным балансом. Так как от i-го поставщика к j-му потребителю запланировано перевезти x_{ij} единиц продукции, то стоимость такой перевозки составит $c_{ij}x_{ij}$. Стоимость же всех перевозок выразится двойной суммой

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} .$$

Систему ограничений получаем из следующих условий:

а) все запасы продукции должны быть вывезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\ 2,...,\ m;$$

б) все запросы потребителей должны быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,\ 2,...,\ n.$$

Таким образом, математическая модель транспортной задачи с правильным балансом имеет следующий вид

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\ 2,...,\ m; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,\ 2,...,\ n; \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = 1,\ 2,...,\ m,\ j = 1,\ 2,...,\ n.$$

Это каноническая задача с mn переменными и $m+n$ ограничениями.

Любая открытая транспортная задача может быть сведена к равносильной закрытой введением фиктивного поставщика или потребителя. В случае превышения запасов продукции над ее потребностями, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный $(n+1)$-й потребитель с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и соответствующие стоимости $c_{i(n+1)} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Аналогично, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный $(m+1)$-й поставщик с запасом продукции $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ со стоимостями $c_{(m+1)j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Например, если запасы трех поставщиков составляют 20, 30 и 50 ед. продукции, соответственно. Общие запасы равны 20 + 30 + 50 = 100 ед. Запросы четырех потребителей составляют 10, 20, 40 и 10 ед., соответственно. Общие запросы равны 10 + 20 + 40 + 10 = 80 ед. В этом случае после всех поставок у кого-то из поставщиков останутся излишки товара.

Для того, чтобы решить такую транспортную задачу, нужно свести ее к задаче с правильным балансом, введя еще одного (пятого) потребителя с запросами, равными 100 – 80 = 20 ед. Тарифы на перевозки к этому потребителю принимаются равными нулю.

§ 2. Циклы в транспортной таблице

Конечный упорядоченный набор различных клеток транспортной таблицы будем называть ***циклом***, если

1) в этом наборе не менее трех клеток;

2) любые две последовательные клетки данного набора, включая последнюю и первую, расположены в одном ряду (строке или столбце) таблицы;

3) никакие три последовательные клетки этого набора не находятся в одном и том же ряду таблицы.

§ 3. Построение начального плана

Решение закрытой транспортной задачи с m поставщиками и n потребителями начинают с нахождения ее плана, содержащего ровно $m+n-1$ занятую клетку.

Метод северо-западного угла. Пусть дана закрытая транспортная задача, условие которой записано в виде таблицы. Начальный план перевозок будем строить, начиная с установления объема перевозки от первого поставщика к первому потребителю, т.е. с заполнения верхней левой («северо-западной») клетки таблицы. Примем этот объем перевозки x_{11} максимально возможным по условиям задачи, т.е. равным наименьшему из чисел a_1 и b_1: $x_{11} = \min(a_1, b_1)$.

Если $a_1 < b_1$, то запасы первого поставщика полностью израсходованы и поэтому все остальные клетки первой строки заполняем прочерками. Запросы первого потребителя теперь равны $b_1 - a_1$.

Если $a_1 > b_1$, то запросы первого потребителя полностью удовлетворены и поэтому все остальные клетки первого столбца заполняем прочерками. Первый поставщик теперь располагает только $a_1 - b_1$ единицами продукции.

Если $a_1 = b_1$, то из рассмотрения можно исключить и первого поставщика и первого потребителя, т.е. заполнить прочерками первую строку и первый столбец таблицы, за исключением одной клетки в первом столбце или в первой строке. В эту клетку помещается нуль.

Теперь в левую верхнюю клетку незаполненной части исходной таблицы помещаем максимально возможный объем перевозок. Продолжая этот процесс, мы придем к некоторому плану данной задачи, содержащему $m+n-1$ занятую клетку.

Метод наименьшей стоимости. Отличие этого метода лишь в том, что на каждом шаге максимально возможным объемом перевозок заполняется не левая верхняя клетка, а та клетка незаполненной части таблицы, в которой содержится наименьшая стоимость перевозок c_{ij} (если таких клеток несколько, то произвольно может быть выбрана для заполнения любая одна из них).

Планы, построенные описанными выше методами, содержат $m+n-1$ занятую клетку. Иногда некоторые из клеток этих планов считаются занятыми, несмотря на то, что в них записан равный нулю объем перевозок.

Пример. Для транспортной задачи с условиями $a_1 = 30, a_2 = a_3 = 45$, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 30$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ построить планы методами северо-западного угла и наименьшей стоимости и сравнить значения целевой функции на этих планах.

Решение. Данная задача с правильным балансом, так как $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 120$. Запишем ее условия в виде таблицы и построим ее план методом северо-западного угла.

Сначала заполняем левую верхнюю клетку таблицы, помещая в нее объем перевозок $x_{11} = \min(30, 30) = 30$. В результате из дальнейшего рассмотрения исключаются и первый поставщик и первый потребитель. В этом случае заполняем прочерками только первый столбец. Затем помещаем в первую строку в соседнюю с заполненной клеткой нуль $(x_{12} = 0)$ и заполняем прочерками оставшиеся клетки в первой строке (табл. 44).

Таблица 44

5 30	3 0	4 –	5 –	30
3 –	4	6	6	45
4 –	2	3	5	45
30	30	30	30	

Теперь заполняем левую верхнюю свободную клетку таблицы, куда помещаем $x_{22} = \min(30 - 0, 45) = 30$ (табл. 45).

Таблица 45

5 30	3 0	4 –	5 –	30
3 –	4 30	6	6	45
4 –	2 –	3	5	45
30	30	30	30	

Далее снова заполняем левую верхнюю клетку незаполненной части таблицы, записывая в нее объем перевозок $x_{23} = \min(30, 45 - 30) = 15$. Прочеркиваем остальные клетки второй строки (табл. 46).

Таблица 46

5 30	3 0	4 –	5 –	30
3 –	4 30	6 15	6 –	45
4 –	2 –	3	5	45
30	30	30	30	

Оставшиеся запасы третьего поставщика в количестве 45 единиц распределяем между третьим и четвертым потребителями $x_{33} = 15$, $x_{34} = 30$ (табл. 47).

Таблица 47

5 30	3 0	4 –	5 –	30
3 –	4 30	6 15	6 –	45
4 –	2 –	3 15	5 30	45
30	30	30	30	

Общая стоимость этого плана:

$$z = 5\cdot 30 + 3\cdot 0 + 4\cdot 30 + 6\cdot 15 + 3\cdot 15 + 5\cdot 30 = 555.$$

Для тех же исходных данных план, построенный методом наименьшей стоимости, имеет вид (табл. 48).

Таблица 48

5 –	3 –	4 15	5 15	30
3 30	4 –	6 –	6 15	45
4 –	2 30	3 15	5 –	45
30	30	30	30	

Общая стоимость этого плана:

$$z = 4\cdot 15 + 5\cdot 15 + 3\cdot 30 + 6\cdot 15 + 2\cdot 30 + 3\cdot 15 = 420.$$

§ 4. Критерий оптимальности плана

Теорема (критерий потенциалов). Для того чтобы план x_{ij} $\left(i=1, ..., m,\ j=1, ..., n\right)$ транспортной задачи был ее оптимальным планом необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа u_i $\left(i=1, ..., m\right)$ и v_j $\left(j=1, ..., n\right)$, называемые ***потенциалами*** соответственно поставщиков и потребителей, что для всех $i=1, ..., m$ и $j=1, ..., n$

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ для всех } \left(i,\ j\right) \text{ таких, что } x_{ij} > 0 \text{ и}$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \text{ для всех } \left(i,\ j\right) \text{ таких, что } x_{ij} = 0.$$

Проиллюстрируем эту теорему для транспортной задачи с правильным балансом с двумя поставщиками и тремя потребителями. Составим математическую модель этой задачи и выпишем к ней двойственную.

$$\min\ z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \qquad \max\ f = a_1u_1 + a_2u_2 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1, & \forall u_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2, & \forall u_2 \\ x_{11} + x_{21} = b_1, & \forall v_1 \\ x_{12} + x_{22} = b_2, & \forall v_2 \\ x_{13} + x_{23} = b_3, & \forall v_3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x_{11} \ge 0, \\ x_{12} \ge 0, \\ x_{13} \ge 0, \\ x_{21} \ge 0, \\ x_{22} \ge 0, \\ x_{23} \ge 0. \end{matrix} \qquad \begin{cases} u_1 + v_1 \le c_{11}, \\ u_1 + v_2 \le c_{12}, \\ u_1 + v_3 \le c_{13}, \\ u_2 + v_1 \le c_{21}, \\ u_2 + v_2 \le c_{22}, \\ u_2 + v_3 \le c_{23}. \end{cases}$$

Согласно свойству, которым обладают взаимно-двойственные задачи этот план будет оптимальным тогда и только тогда, когда существует такой план двойственной (т.е. числа u_i и v_j, удовлетворяющие неравенствам $u_i + v_j \le c_{ij}$) такие, что каждому строгому неравенству $x_{ij} > 0$ в условиях исходной задачи соответствует равенство $u_i + v_j = c_{ij}$ в сопряженном условии двойственной задачи.

Таким образом, теорема является переформулировкой этого свойства на случай транспортной задачи.

§ 5. Проверка плана транспортной задачи на оптимальность

Пусть дана транспортная задача с правильным балансом с m поставщиками и n потребителями, для которой известен первоначальный план перевозок, содержащий $m+n-1$ занятую клетку.

Проверка этого плана на оптимальность состоит из следующих этапов.

1. *Построение системы уравнений для потенциалов*. Вводим потенциалы поставщиков u_i $(i = 1, ..., m)$ и потребителей v_j $(j = 1, ..., n)$. Записывая для каждой занятой клетки $(i,\ j)$ уравнение $u_i + v_j = c_{ij}$, получаем систему из $m+n-1$ линейных уравнений с $m+n$ неизвестными.

2. *Нахождение потенциалов*. Полученная система имеет бесконечное множество решений. Для отыскания одного из ее решений задаем произвольно значение одного из неизвестных потенциалов (например, полагаем его равным нулю), а затем однозначно определяем из системы все остальные потенциалы.

3. *Проверка плана на оптимальность*. Для каждой свободной клетки $(i,\ j)$ транспортной таблицы вычисляем величину $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \le 0$, то рассматриваемый план перевозок является оптимальным планом данной транспортной задачи. Если же хотя бы для одной свободной клетки $\Delta_{ij} > 0$, то данный план оптимальным не является.

Пример. Для транспортной задачи $a_1 = 21$, $a_2 = 24$, $a_3 = 25$, $b_1 = 20$, $b_2 = 20$, $b_3 = 30$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ исследовать на оптимальность план перевозок, построенный методом наименьшей стоимости.

Решение. Сначала, используя метод наименьшей стоимости, находим план данной задачи. Этот план записан в таблице (табл. 49).

Таблица 49

№1	$v_1 = 5$	$v_2 = 6$	$v_3 = 4$	
$u_1 = 0$	8 —	6 15	4 6	21
$u_2 = -1$	7 —	6 —	3 24	24
$u_3 = -1$	4 20	5 5	6 —	25
	20	20	30	

Для проверки построенного плана на оптимальность находим потенциалы поставщиков из системы $\begin{cases} u_1 + v_2 = 6, \\ u_1 + v_3 = 4, \\ u_2 + v_3 = 3, \\ u_3 + v_1 = 4, \\ u_3 + v_2 = 5. \end{cases}$

Она содержит пять уравнений и шесть неизвестными. Полагая $u_1 = 0$, находим $v_2 = 6, v_3 = 4, u_2 = -1, u_3 = -1, v_1 = 5$.

Записываем найденные значения в первую строку и первый столбец таблицы. Для каждой свободной клетки таблицы вычисляем Δ_{ij}. Получаем $\Delta_{11} = -3$, $\Delta_{21} = -3$, $\Delta_{22} = -1$, $\Delta_{33} = -3$.

Поскольку все величины неположительны, построенный план является оптимальным.

§ 6. Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Пусть дана транспортная задача с правильным балансом. Ее решение методом потенциалов состоит из начального шага, выполняемого один раз в начале решения, и общего шага, повторяемого до тех пор, пока не будет получен ее оптимальный план.

I. Начальный шаг

1. Используя метод северо-западного угла или метод наименьшей стоимости, находим первоначальный план перевозок, содержащий $m+n-1$ занятую клетку.

2. Определив потенциалы поставщиков и потребителей, проверяем построенный план на оптимальность. Если этот план окажется оптимальным, то задача решена, если нет, то переходим к общему шагу данного алгоритма.

II. Общий шаг

1. Построение нового плана:

а) так как построенный на предыдущем шаге план не является оптимальным, среди величин Δ_{ij}, вычисленных для свободных клеток, есть по крайней мере одна положительная. Выбираем клетку, соответствующую наибольшему положительному значению Δ_{ij} (если таких клеток несколько, то берем любую из них), помечаем ее знаком $+$.

б) Строим цикл, начиная с отмеченной клетки. И последовательно обходим его клетки, проставляя в них поочередно $-$ и $+$.

в) Из всех объемов перевозок, записанных в отмеченных знаком – клетках, выбираем наименьший и обозначаем его через Θ. Вычитаем величину Θ из объемов перевозок, которые расположены в клетках, отмеченных знаком $-$, и прибавляем Θ к объемам перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком $+$. Получаем новый план перевозок данной задачи, содержащий $m+n-1$ занятую клетку.

2. Проверяем построенный план на оптимальность. Если этот план не оптимален, то снова повторяем общий шаг данного алгоритма.

Пример. Методом потенциалов решить транспортную задачу $a_1=21$, $a_2=13$, $a_3=16$, $b_1=10$, $b_2=18$, $b_3=12$, $b_4=10$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Используя метод наименьшей стоимости, находим первоначальный план данной транспортной задачи. Затем решаем ее методом потенциалов (табл. 50).

Таблица 50

№ 1	$v_1=5$	$v_2=4$	$v_3=3$	$v_4=6$	
$u_1=0$	3 $+$ —	4 2	3 12	6 $-$ 7	21
$u_2=-3$	2 $-$ 10	7 —	4 —	3 $+$ 3	13
$u_3=-2$	5 —	2 16	6 —	3 —	16
	10	18	12	10	

Для нахождения потенциалов составляем систему уравнений

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 4, \\ u_1 + v_3 = 3, \\ u_2 + v_4 = 6, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_4 = 3, \\ u_3 + v_2 = 2. \end{cases}$$

Полагая $u_1 = 0$, находим значения потенциалов. Вычисляем для каждой свободной клетки величину Δ_{ij}: $\Delta_{11} = 2$, $\Delta_{22} = -6$, $\Delta_{23} = -4$, $\Delta_{31} = -2$, $\Delta_{33} = -5$, $\Delta_{34} = 1$.

Так как среди найденных значений Δ_{ij} имеются положительные, то построенный план перевозок не является оптимальным и нужно перейти к новому плану. Наибольшим среди положительных значений Δ_{ij} является $\Delta_{11} = 2$, поэтому помечаем клетку (1, 1) знаком “+”. Строим цикл. Отмечаем клетки выбранного цикла знаками “–” и “+” и находим величину $\Theta = \min\{7, 10\} = 7$. Вычитая величину Θ из объемов перевозок, расположенных в отмеченных знаком “–” клетках, и прибавляя Θ к объемам перевозок в клетках со знаком “+”, получаем новый план перевозок, записанный в следующей таблице (табл. 51).

Таблица 51

№2	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 3$	$v_4 = 4$	
$u_1 = 0$	3 7	4 2	3 12	6 —	21
$u_2 = -1$	2 3	7 —	4 —	3 10	13
$u_3 = -2$	5 —	2 16	6 —	3 —	16
	10	18	12	10	

Определяя для полученного плана значения потенциалов, убеждаемся, что план, приведенный в этой таблице, является оптимальным для данной транспортной задачи.

§ 7. Транспортные задачи с дополнительными условиями

Выше рассмотрена классическая транспортная задача, на которой показано, как используется метод потенциалов для нахождения оптимального плана. В экономике предприятия такие задачи встречаются крайне редко. Обычно при составлении экономико-математической модели задачи транспортного типа приходится вводить целый ряд дополнительных ограничений, а затем пользоваться методом потенциалов.

Ряд экономических задач сводимы к транспортной задаче. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся ситуации в экономике предприятия.

1. Поставки от определенных поставщиков определенным потребителям должны быть исключены (из-за отсутствия необходимых условий хранения, чрезмерной перегрузки коммуникаций и т.д.). Это ограничение требует, чтобы в матрице перевозок, содержащей оптимальный план, определенные клетки оставались свободными, что достигается искусственным завышением затрат на перевозки c_{ij} в клетках, перевозки через которые следует запретить. При этом производят завышение величины c_{ij} до таких значений, которые заведомо больше всех и с которыми их придется сравнивать в процессе решения задачи, например, $c_{ij} = M$, где M – большое положительное число.

2. Определенный транспортный маршрут имеет ограничение по пропускной способности: $x_{ij} \le q$, т.е. по маршруту от от i-го поставщика к j-му потребителю можно перевезти не более q единиц груза.

Выполняем следующие преобразования:

1) столбец № j разбиваем на два столбца – № j и №$(n+1)$;

2) в столбце № j спрос принимается равным q;

3) в столбце №$(n+1)$ спрос принимается равным разности между действительным спросом b_j и ограничением q;

4) тарифы c_{ij} в обоих столбцах почти все одинаковы и равны данным тарифам, но в столбце № j в строке №i, вместо истинного тарифа c_{ij} ставится искусственно завышенный тариф. Обычно в эту клетку помещают букву М, считая, что за ней скрывается большое положительное число.

Затем задача решается обычным методом потенциалов. В ответе объемы перевозок в этих двух столбцах суммируются по каждой строке отдельно.

3. Поставки по определенному маршруту в заданном количестве p обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно ли это: $x_{ij} \ge p$. В этом случае уменьшают запас груза у поставщика и спрос у потребителя на величину p (в строке №i и в столбце № j вычитают величину p) и решают задачу методом потенциалов. В ответе к объему перевозок x_{ij} прибавляют величину p и увеличивают общую стоимость плана на $c_{ij}p$.

Пример. Данные приведены в таблице (табл. 52), $x_{41} \le 100$, $x_{33} \ge 50$.

Таблица 52

5	4	7	8	100
2	9	2	1	50
3	4	10	6	100
3	6	5	7	200
200	100	200	50	450 / 550

Решение. После преобразований получаем таблицу (табл. 53).

Таблица 53

5	4	7	8	5	100
2	9	2	1	2	50
3	4	10	6	3	100–*50*
3	6	5	7	M	200
0	0	0	0	0	100 (фикт.)
100	100	200–*50*	50	200–100	

Далее решаем задачу методом потенциалов (табл. 54–60).

Таблица 54

№1	$v_1 = -1$	$v_2 = 6$	$v_3 = 5$	$v_4 = 7$	$v_5 = 7$	
$u_1 = 6$	5 100	4 —	7 —	8 —	5 —	100
$u_2 = 3$	2 0	9 – 50	2 —	1 + —	2 —	50
$u_3 = -2$	3 —	4 50	10 —	6 —	3 —	50
$u_4 = 0$	3 —	6 + 0	5 150	7 – 50	M —	200
$u_5 = -7$	0 —	0 —	0 —	0 0	0 100	100
	100	100	150	50	100	

Стоимость этого плана $z_1 = 2250$, $\Delta_{24} = 9$, $\Theta = 50$.

Таблица 55

№2	$v_1 = 8$	$v_2 = 6$	$v_3 = 5$	$v_4 = 7$	$v_5 = 7$
$u_1 = -3$	5 100	4 —	7 —	8 —	5 —
$u_2 = -6$	2 – 0	9 —	2 —	1 + 50	2 —
$u_3 = -2$	3 —	4 50	10 —	6 —	3 —
$u_4 = 0$	3 + —	6 50	5 150	7 – 0	M —
$u_5 = -7$	0 —	0 —	0 —	0 0	0 100

$z_2 = 1800,\ \Delta_{41} = 5,\ \Theta = 0.$

Таблица 56

№3	$v_1 = 3$	$v_2 = 6$	$v_3 = 5$	$v_4 = 2$	$v_5 = 2$
$u_1 = 2$	5 100	4 —	7 —	8 —	5 —
$u_2 = -1$	2 – 0	9 —	2 —	1 + 50	2 —
$u_3 = -2$	3 —	4 50	10 —	6 —	3 —
$u_4 = 0$	3 + 0	6 – 50	5 150	7 —	M —
$u_5 = -2$	0 —	0 + —	0 —	0 – 0	0 100

$z_3 = 1800,\ \Delta_{12} = \Delta_{52} = 4,\ \Theta = 0.$

Таблица 57

№4	$v_1 = 3$	$v_2 = 6$	$v_3 = 5$	$v_4 = 6$	$v_5 = 6$
$u_1 = -2$	5 100	4 —	7 —	8 —	5 —
$u_2 = -5$	2 —	9 —	2 —	1 50	2 —
$u_3 = -2$	3 —	4 – 50	10 —	6 —	3 + —
$u_4 = 0$	3 0	6 50	5 150	7 —	M —
$u_5 = -6$	0 —	0 + 0	0 —	0 0	0 – 100

$z_4 = 1800,\ \Delta_{35} = 1,\ \Theta = 50.$

Таблица 58

№5	$v_1=3$	$v_2=6$	$v_3=5$	$v_4=6$	$v_5=6$
$u_1=2$	5 – 100	4 + —	7 —	8 —	5 —
$u_2=-5$	2 —	9 —	2 —	1 50	2 —
$u_3=-3$	3 —	4 —	10 —	6 —	3 50
$u_4=0$	3 + 0	6 – 50	5 150	7 —	M —
$u_5=-6$	0 —	0 50	0 —	0 0	0 50

$z_5=1750,\ \Delta_{12}=4,\ \Theta=50.$

Таблица 59

№6	$v_1=3$	$v_2=2$	$v_3=5$	$v_4=2$	$v_5=2$
$u_1=2$	5 – 50	4 + 50	7 —	8 —	5 —
$u_2=-1$	2 —	9 —	2 —	1 50	2 —
$u_3=1$	3 —	4 —	10 —	6 —	3 50
$u_4=0$	3 + 50	6 —	5 – 150	7 —	M —
$u_5=-2$	0 —	0 – 50	0 + —	0 0	0 50

$z_6=1550,\ \Delta_{53}=3,\ \Theta=50.$

Таблица 60

№7	$v_1=3$	$v_2=5$	$v_3=5$	$v_4=5$	$v_5=5$
$u_1=-1$	5 —	4 100	7 —	8 —	5 —
$u_2=-4$	2 —	9 —	2 —	1 50	2 —
$u_3=-2$	3 —	4 —	10 —	6 —	3 50
$u_4=0$	3 100	6 —	5 100	7 —	M —
$u_5=-5$	0 —	0 0	0 50	0 0	0 50

$z_7 = 1400$, $\Delta_{ij} \le 0$ все.

Ответ. $z_{\min} = 1400 + 10 \cdot 50 = 1900$, $X_{\min} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \\ 50 & 0 & 50 & 0 \\ 100 & 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}$.

Глава 5. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

§ 1. Постановка задачи

Пусть необходимо выполнить n различных работ. Для их выполнения можно привлечь n работников. Каждый из них за определенную плату может выполнить любую, но только одну из предлагаемых работ.

Пусть стоимость назначения работника №i ($i = 1, 2, ..., n$) на должность №j ($j = 1, 2, ..., n$) известна и равна c_{ij}. Определить такое назначение работников, при котором общая стоимость будет наименьшей.

Замечание. Если количество работ и работников не совпадает, то вводят фиктивные работы или работников и приписать им стоимости, равные нулю.

В качестве переменных примем

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если работник } i \text{ назначается на работу } j, \\ 0, \text{ если работник } i \text{ не назначается на работу } j. \end{cases}$$

Математическая модель задачи:

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1, 2, ..., n; \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1, 2, ..., n; \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = 1, 2, ..., n, \; j = 1, 2, ..., n.$$

Задача о назначениях – частный случай транспортной задачи, в которой запасы поставщиков и запросы потребителей можно считать равными 1 (одна рабочая единица). Но из-за ее особенностей, применение метода потенциалов неудобно.

§ 2. Алгоритм решения

Рассмотрим алгоритм так называемого венгерского метода.

1 этап (подготовительный):

1. В каждой строке таблицы найти наименьший элемент и вычесть его из всех элементов данной строки.

2. В каждом столбце полученной таблицы найти наименьший элемент и вычесть его из всех элементов данного столбца.

Если удается распределить все единицы в клетки с нулевыми стоимостями так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце была ровно одна единица, то оптимальное решение найдено. Значение целевой функции в этом случае равно нулю, а т.к. на все переменные наложены условия неотрицательности, то это значение – оптимальное.

Если такое распределение невозможно, то переходим к этапу 2.

2 этап (повторяющийся):

1. Провести минимальное количество прямых через столбцы и строки матрицы таким образом, чтобы они проходили через все нули, содержащиеся в таблице (вычеркнуть все нули).
2. Найти наименьший из невычеркнутых элементов.
3. Вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые.
4. Прибавить его ко всем элементам, лежащим на пересечении прямых.
5. Элементы, через которые проходит только одна прямая, оставить неизменными.

В результате в таблице появится как минимум одно новое нулевое значение. Если удается распределить все единицы в клетки с нулевыми стоимостями так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце была ровно одна единица, то оптимальное решение найдено.

Если такое распределение невозможно, то вернуться к началу этапа 2.

Пример. Школьники Вася, Петя и Коля решили заработать деньги во время каникул и предложили Ивану Ивановичу помыть три его автомобиля. Каждый из школьников оценил мойку этих автомобилей в определенную сумму денег в $ (табл. 61). Как следует Ивану Ивановичу распределить автомобили между школьниками, чтобы общая стоимость мойки была минимальной?

Таблица 61

Автомобиль / Школьник	1	2	3
Вася	15	10	9
Петя	9	15	10
Коля	10	12	8

Решение. Выберем в каждой строке наименьший элемент и вычтем его из всех элементов этой строки (табл. 62).

Таблица 62

6	1	0
0	6	1
2	4	0

Выберем в каждом столбце наименьший элемент и вычтем его из всех элементов этого столбца (табл. 63).

Таблица 63

6	0	0
0	5	1
2	3	0

Выберем в каждой строке и в каждом столбце по одному нулевому элементу (табл. 64).

Таблица 64

6	**0**	0
0	5	1
2	3	**0**

Поскольку получилось допустимое решение, значит, задача решена.

В результате в начальной таблице суммируются клетки, соответствующие выбранным элементам итоговой таблицы.

Ответ. Васе следует поручить мойку второй машины, Пете – первой, Коле – третьей. Общие затраты Ивана Ивановича составят 10 + 9 + 8 = 27 $.

Пример. Через год Иван Иванович купил еще одну машину, и школьникам пришлось позвать для той же работы своего друга Гену. Новые данные приведены в таблице (табл. 65).

Таблица 65

Автомобиль / Школьник	1	2	3	4
Вася	1	4	6	3
Петя	9	7	10	9
Коля	4	5	11	7
Гена	8	7	8	5

Решение. Проведем преобразования, соответствующие первому этапу алгоритма (табл. 66, 67).

Таблица 66

0	3	5	2
2	0	3	2
0	1	7	3
3	2	3	0

Таблица 67

0	3	2	2
2	0	0	2
0	1	4	3
3	2	0	0

Из клеток с нулевыми элементами невозможно составить допустимое решение задачи. Так, если первую машину отдать на мойку Васе, то Коле работы не достанется, и наоборот. Переходим ко второму этапу алгоритма. Вычеркиваем нули (табл. 68).

Таблица 68

0	3	2	2
~~2~~	~~0~~	~~0~~	~~2~~
0	1	4	3
~~3~~	~~2~~	~~0~~	~~0~~

После вычитания числа 1 из всех невычеркнутых элементов и прибавления ее к элементам на пересечении прямых, получим следующую таблицу (табл. 69).

Таблица 69

0	2	1	1
3	0	**0**	2
0	**0**	3	2
4	2	0	**0**

В этой таблице можно выделить допустимое решение (подчеркнутые нули).

Ответ. Васе следует поручить мойку первой машины, Пете – третьей, а Коле – второй, а Гене – четвертой. Общие затраты Ивана Ивановича составят 1 + 5 + 10 + 5 = 21 $.

Пример. Компания имеет 4 базы хранения продукции и 4 заказа на эту продукцию. Продукция доставляется с одной базы по одному заказу. В таблице (табл. 70) даны расстояния между каждой базой и каждым заказчиком. Как следует распределить заказы по базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

Таблица 70

Заказчик / База	1	2	3	4
A	68	72	75	83
B	56	60	58	63
C	38	40	35	45
D	47	42	40	45

Решение. Вычтем минимальные элементы по строкам, получим новую таблицу (табл. 71):

Таблица 71

0	4	7	15
0	4	2	7
3	5	0	10
7	2	0	5

Повторим ту же процедуру для столбцов (табл. 72):

Таблица 72

0	2	7	10
0	2	2	2
3	3	0	5
7	0	0	0

Оптимальное решение не найдено. Переходим к этапу 2. Вычеркнем все нули с помощью минимального количества прямых (табл. 73).

Таблица 73

0	2	**7**	10
0	2	**2**	2
3	3	**0**	5
7	**0**	**0**	**0**

В незачеркнутых клетках наименьший элемент равен 2. Вычитаем его из незачеркнутых элементов и прибавляем к элементам, стоящих на пересечении прямых (табл. 74).

Таблица 74

0	0	7	8
0	**0**	2	0
3	1	**0**	3
9	0	2	**0**

Один из вариантов распределения заказов по базам выделен в таблице. Возможны и другие.

Ответ. Первая база выполняет первый заказ, вторая – второй, третья – третий, четвертая – четвертый. Общая дальность транспортировки составляет 68 + 60 + 35 + 45 = 208.

Глава 6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

§ 1. Понятие об играх и стратегиях

Игра (в математике) – это формализованная (математическая) модель конфликтной ситуации. Формализация выражена в определении правил поведения сторон, имеющих интересы в данной ситуации, т.е.:

– определены варианты действий сторон;
– известен исход игры при каждом варианте;
– известен объём информации каждой стороны о поведении другой стороны.

Стороны, участвующие в игре, называются ***игроками***. Правила, по которым действует каждый игрок в каждой из возможных ситуаций игры, называются ***стратегиями игрока***.

§ 2. Классификация игр

Классификацию игр можно проводить по различным основаниям.

В зависимости от количества игроков различают игры двух и n игроков. Первые из них наиболее изучены.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется *конечной*. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, игра называется *бесконечной.*

По характеру взаимодействия игры делятся на бескоалиционные: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции; коалиционные (кооперативные): могут вступать в коалиции.

По характеру выигрышей игры делятся на: игры с нулевой суммой (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с ненулевой суммой.

По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные и др.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш первого игрока в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии этого игрока, столбец – номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям). Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока.

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

§ 3. Запись матричной игры в виде платёжной матрицы

Пусть первый игрок имеет m стратегий A_1, A_2, …, A_m. Второй – n стратегий B_1, B_2, …, B_n. В общем виде матричная игра может быть записана с помощью платёжной матрицы (матрицы игры)

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, где a_{ij} – выигрыш первого игрока при выборе игроками пары стратегий $\left(A_i, B_j\right)$.

§ 4. Примеры составления платёжных матриц

1. Пусть задана следующая игра с участием двух игроков. Первый игрок загадывает любое целое число от 1 до 3. Второй игрок должен отгадать это число. Если второй игрок указывает число правильно, он получает выигрыш, равный значению загаданного первым игроком числа. В противном случае этот выигрыш получает первый игрок.

Стратегии первого игрока: A_1 – загадать число «1», A_2 – загадать число «2», A_3 – загадать число «3». Стратегии второго игрока: B_1 – назвать число «1», B_2 – назвать число «2», B_3 – назвать число «3». Платёжная матрица:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Компания производит сырную пасту. Менеджер компании должен решить, сколько ящиков сырной пасты нужно произвести в течение месяца. Спрос на данный продукт может составлять 6, 7, 8 или 9 ящиков. Затраты на производство одного ящика составляют 45 тыс. руб., продаётся ящик по цене 95 тыс. руб. Если ящик не продан в течение месяца, то продукт портится и фирма несёт дополнительные убытки в размере 5 тыс. руб. на уничтожение ящика. Составить матрицу возможных доходов компании.

Стратегии первого игрока (компания): A_1 – произвести 6 ящиков, A_2 – произвести 7 ящиков, A_3 – произвести 8 ящиков, A_4 – произвести 9 ящиков. Стратегии второго игрока (рынок): B_1 – запросить 6 ящиков, B_2 – запросить 7 ящиков, B_3 – запросить 8 ящиков, B_4 – запросить 9 ящиков. Платёжная матрица имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 300 & 300 & 300 & 300 \\ 250 & 350 & 350 & 350 \\ 200 & 350 & 400 & 400 \\ 150 & 250 & 350 & 450 \end{pmatrix}.$$

§ 5. Нижняя и верхняя цена игры. Седловая точка

Рассмотрим матричную игру. Предположим, что каждый из игроков стремится выбрать наилучшую для себя стратегию с учётом того, что противодействующий ему игрок также стремится выбрать для себя наилучшую стратегию.

Первый игрок выбирает стратегию, дающую ему максимально возможный выигрыш, но с учётом того, что второй игрок выбирает стратегию, дающую ему минимальный проигрыш. Если стратегия первого игрока известна (A_i), то второй игрок выберет ту стратегию, для которой достигается $\min\limits_j a_{ij}$. На паре выбранных стратегий достигается выигрыш $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, который называется ***нижней ценой игры*** и равен минимальному гарантированному выигрышу первого игрока.

Второй игрок выбирает стратегию, дающую ему минимально возможный проигрыш, но с учётом того, что первый игрок выбирает стратегию, дающую ему максимальный выигрыш. Если стратегия второго игрока известна (B_j), то первый игрок выберет ту стратегию, для которой достигается $\max\limits_i a_{ij}$. На паре выбранных стратегий достигается выигрыш $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$, который называется ***верхней ценой игры*** и равен максимально возможному проигрышу второго игрока.

В случае, если значения α и β совпадают, говорят, что игра имеет *решение в чистых стратегиях*, а стратегии, в которых достигается это значение – *оптимальными чистыми стратегиями*. Пара оптимальных чистых стратегий *называется седловой точкой.* Величина $\alpha = \beta = \nu$ называется *ценой игры*.

В матрице $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ существует решение в чистых стратегиях (табл. 75).

Таблица 75

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min\limits_j a_{ij}$
A_1	7	6	5	$\boxed{4}$	4
A_2	1	8	2	3	1
A_3	8	1	3	2	1
$\max\limits_i a_{ij}$	8	8	5	4	$\alpha = 4$ / $\beta = 4$

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 4,\ \beta = \min_j \max_i a_{ij} = 4,\ \nu = 4, \text{ седловая точка } (A_1,\ B_4).$$

В матрице $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ не существует решения в чистых стратегиях (табл. 76).

Таблица 76

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min\limits_j a_{ij}$
A_1	7	6	5	2	2
A_2	1	8	2	3	1
A_3	8	1	3	2	1
$\max\limits_i a_{ij}$	8	8	5	3	$\alpha = 2$ $\beta = 3$

Т.к. $\alpha \neq \beta$, то седловой точки нет.

§ 6. Доминирование стратегий

Если в платёжной матрице есть две строки, такие, что все элементы одной не больше соответствующих элементов другой, то строку с меньшими элементами можно исключить, так как стратегия с меньшими выигрышами заведомо не выгодна для первого игрока.

Если в платёжной матрице есть два столбца, такие, что все элементы одного не больше соответствующих элементов другого, то столбец с большими элементами можно исключить, так как стратегия с большими выигрышами первого игрока заведомо не выгодна для второго.

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 8 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Все элементы первого столбца не меньше соответствующих элементов второго столбца, значит, первый столбец можно вычеркнуть: $A_1 = \begin{pmatrix} \cancel{2} & 1 & 2 & 5 & 1 \\ \cancel{8} & 3 & 4 & 1 & 5 \\ \cancel{2} & 2 & 2 & 7 & 1 \\ \cancel{6} & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

В оставшейся матрице все элементы первой строки не больше соответствующих элементов третьей строки, значит, первую строку можно вычеркнуть: $A_2 = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{1} \\ \cancel{8} & 3 & 4 & 1 & 5 \\ \cancel{2} & 2 & 2 & 7 & 1 \\ \cancel{6} & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

В оставшейся матрице все элементы второго столбца не меньше соответствующих элементов первого столбца, значит, второй столбец можно вычеркнуть: $A_3 = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{1} \\ \cancel{8} & 3 & \cancel{4} & 1 & 5 \\ \cancel{2} & 2 & \cancel{2} & 7 & 1 \\ \cancel{6} & 2 & \cancel{3} & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

§ 7. Решение матричных игр в смешанных стратегиях

Пусть матричная игра не имеет седловой точки. Нижняя цена α игры не совпадает с верхней ценой игры β.

Смешанная стратегия – это совокупность вероятностей применения игроком чистых стратегий: $S_1 = \left(p_1,\, p_2,\, ...,\, p_m\right)$, $S_2 = \left(q_1,\, q_2,\, ...,\, q_n\right)$, где $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$ и $q_1 + q_2 + ... + q_n = 1$.

Выигрыш первого игрока и проигрыш второго понимается как среднее значение выигрыша, т.е. математическое ожидание выигрыша $M\left(S_1,\, S_2\right)$.

Пусть игра задана платёжной матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Средний выигрыш второго игрока при выборе первым стратегии A_i равен $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$. Тогда средний выигрыш второго игрока равен

$$M\left(S_1,\, S_2\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right) p_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j p_i .$$

Средний выигрыш первого игрока при выборе вторым стратегии B_j равен $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} p_i$. Тогда средний выигрыш первого игрока равен

$$M\left(S_1,\, S_2\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \right) q_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} q_j p_i .$$

$$v_1 = \max_{S_1} \min_{S_2} M\left(S_1,\, S_2\right),\ v_2 = \min_{S_2} \max_{S_1} M\left(S_1,\, S_2\right).$$

Смешанные стратегии, при реализации которых $v_1 = v_2$, называются оптимальными смешанными стратегиями игроков. Число $v = v_1 = v_2$ называется *ценой игры*.

§ 8. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Если первый игрок придерживается своей оптимальной стратегии, то, какой бы стратегии не придерживался второй игрок, выигрыш первого не может быть меньше цены игры v, т.к цена игры – это наименьший гарантированный выигрыш первого игрока:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \ge v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \ge v, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \ge v, \end{cases}$$
$$p_1 \ge 0,\ p_2 \ge 0, \ldots,\ p_m \ge 0.$$

В левых частях неравенств – средние выигрыши первого игрока при выборе вторым игроком своих первой, второй, …, последней стратегий, соответственно.

Для второго игрока:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le v, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le v, \end{cases}$$
$$q_1 \ge 0,\ q_2 \ge 0, \ldots,\ q_n \ge 0.$$

Разделим обе части каждого из уравнений на $v > 0$. Если $v \le 0$, то необходимо произвести сдвиг в платёжной матрице (прибавить ко всем элементам одно и то же число c) так, чтобы нижняя цена игры была положительной. Тогда $v' = v + c$.

Величину $\frac{p_i}{v}$ обозначим через x_i, а величину $\frac{q_j}{v}$ обозначим через y_j. Получим систему для первого игрока

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge 1, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_m \ge 0.$$

Для первого игрока необходимо максимизировать цену игры. Следовательно, значение $\frac{1}{v}$ должно стремиться к минимуму.

Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$z_{\min} = \min \frac{1}{v} = x_1 + x_2 + \ldots + x_m.$$

Для второго игрока получим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, \ldots,\ y_n \ge 0.$$

Второй игрок старается минимизировать цену игры. Следовательно, значение $\frac{1}{v}$ должно стремиться к максимуму.

Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$f_{\max} = \max \frac{1}{v} = y_1 + y_2 + \ldots + y_n .$$

Получаем две задачи линейного программирования, которые являются взаимно двойственными.

$$\min\ z = x_1 + x_2 + \ldots + x_m ,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge 1, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_m \ge 0.$$

$$\max\ f = y_1 + y_2 + \ldots + y_n ,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, \ldots,\ y_n \ge 0.$$

Обычно удобнее решить сначала вторую задачу симплекс-методом. Если какая-либо задача содержит всего две переменные, то лучше решить сначала её – графическим методом.

После нахождения оптимального значения целевых функций и оптимальных значений переменных, можно найти цену игры и смешанные стратегии игроков по формулам $v = \frac{1}{z_{\min}} = \frac{1}{f_{\max}}$, $p_i = x_i v$, $q_j = y_j v$.

Если производился сдвиг, то $v' = \frac{1}{z_{\min}} = \frac{1}{f_{\max}}$, $p_i = x_i v'$, $q_j = y_j v'$, $v = v' - c$.

§ 9. Алгоритм решения матричной игры

1. Найти нижнюю и верхнюю цены игры. Если они равны, то ответом будет седловая точка.

2. Произвести редукцию стратегий, т.е. исключить из рассмотрения заведомо невыгодные стратегии. Соответствующие вероятности в смешанных стратегиях принять равными нулю.

3. Если нижняя цена игры неположительна, произвести сдвиг так, чтобы новая нижняя цена игры была положительной.

4. Записать взаимно-двойственные задачи и найти их решения. По ним определить смешанные стратегии и цену игры.

Пример. Решите игру с платёжной матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 9 & 7 \\ 6 & 9 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Определим нижнюю и верхнюю цены игры.

$$A=\begin{array}{c|c}\begin{pmatrix}3 & 10 & 9 & 7\\ 6 & 9 & 4 & 5\\ 8 & 7 & 2 & 4\end{pmatrix} & \begin{matrix}3\\ \boxed{4}\\ 2\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}8 & 10 & 9 & \boxed{7}\end{matrix} & \end{array}$$

Нижняя цена игры $\alpha=\max\{3, 4, 2\}=4$, верхняя цена $\beta=\min\{8, 10, 9, 7\}=7$, $\alpha\neq\beta$. Седловой точки нет, $4\le\nu\le 7$.

Будем искать смешанные стратегии игроков: $S_1=(p_1,\ p_2,\ p_3)$, $S_2=(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4)$. Второй столбец вычёркиваем, так как вторая стратегия не выгодна для второго игрока. Значит, $q_2=0$. $A_1=\begin{pmatrix}3 & 9 & 7\\ 6 & 4 & 5\\ 8 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

Для удобства дальнейшего решения преобразуем матрицу – вычтем из всех элементов число 2: $A_2=\begin{pmatrix}1 & 7 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 6 & 0 & 2\end{pmatrix}$. При этом $\nu'=\nu-2$.

Введём переменные:

$$x_1=\frac{p_1}{\nu'},\ x_2=\frac{p_2}{\nu'},\ x_3=\frac{p_3}{\nu'},\ y_1=\frac{q_1}{\nu'},\ y_2=\frac{q_3}{\nu'},\ y_3=\frac{q_4}{\nu'}.$$

Получаем пару взаимно двойственных задач.

$$\begin{array}{c|c}\begin{gathered}\min\ z=x_1+x_2+x_3,\\ \begin{cases}x_1+4x_2+6x_3\ge 1,\\ 7x_1+2x_2\ge 1,\\ 5x_1+3x_2+2x_3\ge 1,\end{cases}\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, x_3\ge 0.\end{gathered} & \begin{gathered}\max\ f=y_1+y_2+y_3,\\ \begin{cases}y_1+7y_2+5y_3\le 1,\\ 4y_1+2y_2+3y_3\le 1,\\ 6y_1+2y_3\le 1,\end{cases}\\ y_1\ge 0,\ y_2\ge 0, y_3\ge 0.\end{gathered}\end{array}$$

После приведения к каноническому виду решим вторую задачу симплекс-методом (табл. 77–80).

$$\min\ (-f)=-y_1-y_2-y_3,$$
$$\begin{cases}y_1+7y_2+5y_3+y_4=1,\\ 4y_1+2y_2+3y_3+y_5=1,\\ 6y_1+2y_3+y_6=1,\end{cases}$$
$$y_k\ge 0,\ k=1, ..., 6.$$

Таблица 77

$c_{БАЗ}$	Базис	-1	-1	-1	B
		y_1	y_2	y_3	
0	y_4	1	$\boxed{7}$	5	1
0	y_5	4	2	3	1
0	y_6	6	0	2	1
	$-f$	1	1	1	0

Таблица 78

базис	y_1	y_4	y_3	B
y_2	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$
y_5	$\frac{26}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{5}{7}$
y_6	$\boxed{6}$	0	2	1
$-f$	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$

Таблица 79

Базис	y_6	y_4	y_3	B
y_2	$-\frac{1}{42}$	$\frac{1}{7}$	$\boxed{\frac{2}{3}}$	$\frac{5}{42}$
y_5	$-\frac{13}{21}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{21}$
y_1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$-f$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$

Таблица 80

базис	y_6	y_4	y_2	B
y_3				$\frac{5}{28}$
y_5				
y_1				$\frac{3}{28}$
$-f$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$

Получаем $f_{\min} = f\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{42}, 0\right) = f\left(\dfrac{3}{28}, \dfrac{5}{28}, 0\right) = \dfrac{2}{7}$.

Найдём оптимальное решение первой задачи, воспользовавшись свойством взаимно-двойственных задач. В двойственную задачу подставим первое оптимальное решение.

$$
\begin{array}{l|c|l}
\min\ z = x_1 + x_2 + x_3, & & \max\ f = y_1 + y_2 + y_3, \\
\left\{\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 6x_3 \ge 1, \\ 7x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 1, \end{array}\right. & \begin{array}{c} (>) \longrightarrow \\ (>) \longrightarrow \\ (=) \end{array} & \begin{array}{l} y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \\ y_3 \ge 0, \end{array} \\
\begin{array}{l} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \\ x_3 \ge 0. \end{array} & \begin{array}{c} (=) \\ (<) \longrightarrow \\ (=) \end{array} & \left\{\begin{array}{l} y_1 + 7y_2 + 5y_3 \le 1, \\ 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 1, \\ 6y_1 + 2y_3 \le 1. \end{array}\right.
\end{array}
$$

$$
\left\{\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_2 = 0; \end{array}\right. \qquad x_1 = x_3 = \frac{1}{7}.
$$

Значит, $z_{\max} = z\left(\dfrac{1}{7}, 0, \dfrac{1}{7}\right) = \dfrac{2}{7}$, $\quad \nu' = \dfrac{1}{f} = \dfrac{7}{2}$, $\quad p_1 = \nu' x_1 = \dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{2}$, $p_2 = \nu' x_2 = 0$, $p_3 = \nu' x_3 = \dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{2}$.

Найдем смешанную стратегию второго игрока.

$$q_1 = \nu' y_1 = \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{12},\ q_3 = \nu' y_2 = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{42} = \frac{5}{12},\ q_4 = \nu' y_3 = 0,$$

$$\nu = \nu' + 2 = \frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2} \text{ или}$$

$$q_1 = \nu' y_1 = \frac{7}{2}\cdot\frac{3}{28} = \frac{3}{8},\ q_3 = \nu' y_2 = 0,\ q_4 = \nu' y_3 = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{28} = \frac{5}{8}.$$

$$\nu = \nu' + 2 = \frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2}.$$

При подстановке в двойственную задачу второго оптимального решения, для исходной задачи находится то же оптимальное решений, что и при подстановке первого.

Ответ. $\nu = \dfrac{11}{2}$, $S_1 = \left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$, $S_2^{(1)} = \left(\dfrac{7}{12}, 0, \dfrac{5}{12}, 0\right)$, $S_2^{(2)} = \left(\dfrac{3}{8}, 0, 0, \dfrac{5}{8}\right)$.

Пример. Решите игру с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. $A = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -1 \\ -4 \\ \boxed{0} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 5 & 4 & \boxed{3} \end{matrix} & \end{array}$ $\qquad \alpha = 0,\ \beta = 3,\ 0 \le \nu \le 3$.

Пусть $\nu' = \nu + 1$. Тогда $\nu = \nu' - 1$, $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Обозначим $x_1 = \dfrac{p_1}{\nu'}$, $x_2 = \dfrac{p_2}{\nu'}$, $x_3 = \dfrac{p_3}{\nu'}$, $y_1 = \dfrac{q_1}{\nu'}$, $y_2 = \dfrac{q_2}{\nu'}$, $y_3 = \dfrac{q_3}{\nu'}$.

Получим пару задач линейного программирования:

$$\begin{array}{lcl}
\min\ z = x_1 + x_2 + x_3, & & \max\ f = y_1 + y_2 + y_3, \\
\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \ge 1, \\ \qquad\ 3x_2 + 5x_3 \ge 1, \\ 4x_1 - 3x_2 \ + x_3 \ge 1, \end{array}\right. & \begin{array}{l} (=) \\ (>) \longrightarrow \\ (>) \longrightarrow \end{array} & \begin{array}{l} y_1 \ge 0, \\ y_2 \ge 0, \\ y_3 \ge 0, \end{array} \\
\begin{array}{l} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \\ x_3 \ge 0. \end{array} & \begin{array}{l} (=) \\ (<) \longrightarrow \\ (=) \end{array} & \left\{\begin{array}{l} 2y_1 \qquad + 4y_3 \le 1, \\ 6y_1 + 3y_2 - 3y_3 \le 1, \\ 4y_1 + 5y_2 \ + y_3 \le 1. \end{array}\right.
\end{array}$$

Решаем вторую задачу симплекс-методом (табл. 81–83).

Таблица 81

$c_{БАЗ}$	Базис	-1	-1	-1	B
		y_1	y_2	y_3	
0	y_4	2	0	$\boxed{4}$	1
0	y_5	6	3	–3	1
0	y_6	4	5	1	1
	$-f$	1	1	1	0

Таблица 82

Базис	y_1	y_2	y_4	B
y_3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y_5	$\frac{15}{2}$	3	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$
y_6	$\frac{7}{2}$	$\boxed{5}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$-f$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

Таблица 83

Базис	y_1	y_6	y_4	B
y_3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y_5		$-\frac{3}{5}$		
y_2	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$
$-f$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$

Получили оптимальное решение: $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{3}{20}$, $y_3 = \frac{1}{4}$, $v' = \frac{1}{f_{\max}} = \frac{5}{2}$.

Подставим эти значения в неравенства двойственной задачи. Получаем систему для нахождения оптимального решения исходной задачи

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Ее решение: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{5}$.

Из равенств $x_1 = \frac{p_1}{v'}$, $x_2 = \frac{p_2}{v'}$, $x_3 = \frac{p_3}{v'}$, $y_1 = \frac{q_1}{v'}$, $y_2 = \frac{q_2}{v'}$, $y_3 = \frac{q_3}{v'}$ получаем оптимальные смешанные стратегии игроков. А также $v = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$.

Ответ. $S_1 = \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, $S_2 = \left(0; \frac{3}{8}; \frac{5}{8}\right)$, $v = \frac{3}{2}$.

§ 10. Выбор оптимальной стратегии в условиях неопределенности (игры с природой)

Специфика ситуации полной неопределенности. Мы предполагали, что все участники игры имеют свои интересы, которые сталкиваются с интересами других участников. Однако так бывает далеко не всегда. Ситуации, при которой нам либо ничего не известно об интересах второй стороны, либо эти интересы действительно отсутствуют (второй игрок – «природа»), характеризуются как ситуации принятия решений в условиях полной неопределенности (или игры с природой). Термин «природа» употребляется здесь в некотором символическом смысле как обозначение некой действительности, мотивы проявления которой нам неизвестны.

Тот факт, что в рассматриваемой ситуации вторая сторона не имеет, с нашей точки зрения, каких-либо интересов, несколько меняет и наш подход к выбору своей оптимальной стратегии.

Следует отметить и еще одно отличие. При применении принципа доминирования стратегий мы уже не можем производить исключение стратегий второго игрока («природы»), поскольку не имеем информации о его интересах, а следовательно, никаких разумных оснований для исключения стратегий.

Критерии выбора оптимальной стратегии

Рассмотрим игру, заданную платежной матрицей A.

Критерий Вальда. Отражает «принцип гарантированного результата». Выбираем такую стратегию, которая максимизировала бы наш выигрыш в самой неблагоприятной для нас ситуации. В математическом виде критерий записывается как $W = \max_i \min_j a_{ij}$ (наибольшее число из наименьших в каждой строке).

В качестве оптимальной выбирается стратегия, на которой достигается значение W. Этот критерий называют критерием «крайнего пессимизма».

Критерий максимакса. Этот критерий является в определенном смысле противоположным по своему смыслу предыдущему критерию. Он предполагает рассмотрение наиболее благоприятного для нас случая. Выбирается в качестве оптимальной такая стратегия, для которой этот самый благоприятный случай дает самый большой выигрыш.

В математическом виде критерий записывается как $M = \max_i \max_j a_{ij}$.

В качестве оптимальной стратегии выбирается стратегия, на которой достигается значение M. Этот критерий называют критерием «крайнего оптимизма».

Критерий Гурвица. Этот критерий является обобщением двух предыдущих критериев. Он представляет собой целое семейство критериев, зависящих от некоторого параметра α, смысл которого – в определении баланса между подходами «крайнего пессимизма» и «крайнего оптимизма». В математическом виде критерий записывается как

$$H_A = \max_i \left(\alpha \max_j a_{ij} + (1-\alpha) \min_j a_{ij} \right).$$

В качестве оптимальной стратегии выбирается стратегия, на которой достигается значение H_A. Значение параметра выбирается из интервала $[0; 1]$. Выбор конкретного значения параметра определяется субъективными факторами, например склонностью к риску лица, принимающего решение. При отсутствии каких-либо явных предпочтений вполне логично, например, выбрать значение $\alpha = 0,5$.

Критерий Сэвиджа (критерий минимаксного риска). Применение данного критерия предполагает рассмотрение матрицы, смысл которой состоит в том, что для каждой стратегии второго игрока определяется выигрыш в наиболее благоприятном случае (при наиболее правильном выборе стратегии первым игроком для данной ситуации), а далее вычисляются величины «недополученных» выигрышей для всех остальных стратегий первого игрока при рассматриваемой стратегии второго игрока. Элементы данной матрицы $R=\left(r_{ij}\right)$, которая называется матрицей риска, рассчитываются по формуле $r_{ij}=\max\limits_{i} a_{ij}-a_{ij}$. Далее к матрице рисков применяется минимаксный подход, а именно: $S=\min\limits_{i}\max\limits_{j} r_{ij}$.

В качестве оптимальной стратегии выбирается стратегия, на которой достигается S. Тем самым мы выбираем стратегию, для которой наибольшее значение «недополучения» будет иметь наименьшее значение.

Критерий Лапласа. Этот критерий исходит из следующего соображения. Поскольку нам ничего не известно о принципах или вероятностях применения вторым игроком своих стратегий, то мы предполагаем эти вероятности все равными $\frac{1}{n}$. Тогда критерий можно записать так: $V=\max\limits_{i}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right)$. Таким образом, смысл данного критерия – максимизация ожидаемого выигрыша в предположении о равновероятности применения вторым игроком своих стратегий.

Пример. Найти оптимальные стратегии первого игрока, исходя из различных критериев, в игре с полной неопределенностью относительно поведения второго игрока, заданной следующей платежной матрицей:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 18 & 25 \\ 8 & 7 & 8 & 23 \\ 21 & 18 & 12 & 21 \\ 20 & 22 & 19 & 15 \end{pmatrix}.$$

Критерий Вальда. Вычислим минимальные значения по строкам, а далее из них выберем максимальное.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 18 & 25 \\ 8 & 7 & 8 & 23 \\ 21 & 18 & 12 & 21 \\ 20 & 22 & 19 & 15 \end{pmatrix}\begin{matrix} 5 \\ 7 \\ 12 \\ 15 \end{matrix}$$

Ответ. Стратегия 4.

Критерий максимакса. Вычислим максимальные значения по строкам и из них выберем максимальное.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 10 & 18 & 25\\ 8 & 7 & 8 & 23\\ 21 & 18 & 12 & 21\\ 20 & 22 & 19 & 15\end{pmatrix}\begin{matrix}25\\23\\21\\22\end{matrix}$$

Ответ. Стратегия 1.

Критерий Гурвица. Вычислим максимальные и минимальные значения по строкам, а далее произведем их взвешивание с коэффициентом $\alpha=0{,}5$:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 10 & 18 & 25\\ 8 & 7 & 8 & 23\\ 21 & 18 & 12 & 21\\ 20 & 22 & 19 & 15\end{pmatrix}\begin{matrix}5\\7\\12\\15\end{matrix}\left\|\begin{matrix}25\\23\\21\\22\end{matrix}\right\|\begin{matrix}0{,}5\cdot 5+(1-0{,}5)\cdot 25=15\\ 0{,}5\cdot 7+(1-0{,}5)\cdot 23=15\\ 0{,}5\cdot 12+(1-0{,}5)\cdot 21=16{,}5\\ 0{,}5\cdot 15+(1-0{,}5)\cdot 22=18{,}5\end{matrix}$$

Ответ. Стратегия 4.

Критерий Сэвиджа. Построить матрицу рисков. Сначала выберем максимальные значения по столбцам, а потом из них вычтем сами элементы:

$$A=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}5 & 10 & 18 & 25\\ 8 & 7 & 8 & 23\\ 21 & 18 & 12 & 21\\ 20 & 22 & 19 & 15\end{pmatrix}\\ \hline\hline \begin{matrix}21 & 22 & 19 & 25\end{matrix}\end{array};\; R=\begin{pmatrix}16 & 12 & 1 & 0\\ 13 & 15 & 11 & 2\\ 0 & 4 & 7 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 10\end{pmatrix}.$$

Далее найдем максимальные значения по строкам и из них выберем минимальное: $R=\begin{pmatrix}16 & 12 & 1 & 0\\ 13 & 15 & 11 & 2\\ 0 & 4 & 7 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 10\end{pmatrix}\begin{matrix}16\\15\\7\\10\end{matrix}$

Ответ. Стратегия 3.

Критерий Лапласа. Вычислим средние арифметические по строкам и из них выберем максимальное:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 10 & 18 & 25\\ 8 & 7 & 8 & 23\\ 21 & 18 & 12 & 21\\ 20 & 22 & 19 & 15\end{pmatrix}\begin{matrix}0{,}25\cdot(5+10+18+25)=14{,}5\\ 0{,}25\cdot(8+7+8+23)=11{,}5\\ 0{,}25\cdot(21+18+12+21)=18\\ 0{,}25\cdot(20+22+19+15)=19\end{matrix}$$

Ответ. Стратегия 4.

§ 11. Выбор стратегии при наличии вероятностной информации

В отличие от ситуации полной неопределенности весьма частой является ситуация, когда в распоряжении игрока есть информация о вероятностях применения стратегий второй стороной. Эти вероятности называются априорными вероятностями.

Обозначим вероятности стратегий второго игрока как $q_j,\ j=1, 2,...,n$.

Пусть дана платежная матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Тогда наиболее разумным критерием является максимизация среднего ожидаемого выигрыша (математического ожидания) и минимизация разброса выигрышей (среднего квадратического отклонения).

Эти величины вычисляются по формулам $(i=1, 2, \dots, m)$

$$e_i = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \dots + a_{in}q_n, \ \sigma_i = a_{i1}^2 q_1 + a_{i2}^2 q_2 + \dots + a_{in}^2 q_n - e_i^2.$$

Пример. Найти оптимальные стратегии первого игрока в условиях неопределённости, заданной следующей платежной матрицей, если известны вероятности состояний «природы» $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,1$, $p_3 = 0,5$, $p_4 = 0,2$:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 18 & 25 \\ 8 & 7 & 8 & 23 \\ 21 & 18 & 12 & 21 \\ 20 & 22 & 19 & 15 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдём средние выигрыши первого игрока.

$$e_1 = 0,2\cdot 5 + 0,1\cdot 10 + 0,5\cdot 18 + 0,2\cdot 25 = 16;$$
$$e_2 = 0,2\cdot 8 + 0,1\cdot 7 + 0,5\cdot 8 + 0,2\cdot 23 = 10,9;$$
$$e_3 = 0,2\cdot 21 + 0,1\cdot 18 + 0,5\cdot 12 + 0,2\cdot 21 = 16,2;$$
$$e_4 = 0,2\cdot 20 + 0,1\cdot 22 + 0,5\cdot 19 + 0,2\cdot 15 = 13,7.$$

Наибольший средний выигрыш достигается при реализации третьей стратегии.

Для более тонкого исследования вычисляют средние квадратические отклонения выигрышей.

$$\sigma_1 = \sqrt{0,2\cdot 5^2 + 0,1\cdot 10^2 + 0,5\cdot 18^2 + 0,2\cdot 25^2 - 16^2} \approx 6,78;$$
$$\sigma_2 = \sqrt{0,2\cdot 8^2 + 0,1\cdot 7^2 + 0,5\cdot 8^2 + 0,2\cdot 23^2 - 10,9^2} \approx 6,06;$$
$$\sigma_3 = \sqrt{0,2\cdot 21^2 + 0,1\cdot 18^2 + 0,5\cdot 12^2 + 0,2\cdot 21^2 - 16,2^2} \approx 4,29;$$
$$\sigma_4 = \sqrt{0,2\cdot 20^2 + 0,1\cdot 22^2 + 0,5\cdot 19^2 + 0,2\cdot 15^2 - 13,7^2} \approx 12,89.$$

Третья стратегия снова наиболее предпочтительна, т.к. разброс выигрышей здесь наименьший.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аронович, А.Б. Сборник задач по исследованию операций / А.Б. Аронович, М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. – М.: Изд-во МГУ, 1997. – 256 с.

2. Дубров, А.М. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учеб. пособие / А.М. Дубров, Б.А. Лагоша, Е.Ю. Хрусталев; под ред. Б.А. Лагоши. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 176 с.

3. Исследование операций в экономике: Учебн. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 407 с.

4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.

5. Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А.С. Шапкин, Н.П. Мазаев. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2003. – 400 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ