Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра компьютерного моделирования и нанотехнологий

531(07)
П 542

А.А. Поляков

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр
ЮУрГУ 2018

УДК 531(075.8) + 539.1(075.8)

П 542

Одобрено
учебно-методической комиссией Института
естественных и точных наук

Рецензенты:

Дубинин Н.Э., Саунина С.И.

Поляков, А.А.

П 542 Механика и молекулярная физика: учебное пособие / А.А. Поляков. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2018. – 124 с.

В настоящем издании предложен курс лекций, читаемый автором в Высшей школе электроники и компьютерных наук последние двадцать лет. В пособии приведены в кратком виде основные понятия и определения, законы, решения примеров общей физики для разделов: механика, молекулярная физика и термодинамика. Пособие снабжено большим количеством рисунков, облегчающих понимание курса. Определения и утверждения выделены шрифтом и цветом, что позволяет учащимся структурировать учебный материал.

Учебное пособие предназначено для студентов бакалавриата и специалитета Высшей школы электроники и компьютерных наук – для специальностей 02.03.02, 09.03.01, 09.03.04, 10.03.01, 11.03.02, 11.03.03, 12.03.01, 24.03.02, 27.03.04, 10.05.03, 11.05.01, 24.05.06.

УДК 531(075.8) + 539.1(075.8)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Читателю предлагается краткое и доступное изложение курса лекций по Механике и молекулярной физике, который преподается автором студентам Высшей школы электроники и компьютерных наук ЮУрГУ. Главная цель пособия – дать слушателям краткие и понятные знания, побудить к развитию мышления, помочь в решении задач.

Современные информационные технологии позволяют студенту получить всю полноту информации по изучаемому предмету, поэтому важным становится не подробное изложение фактов, а достижение понимания сути наиболее быстрым и простым путем.

В тексте выделены определения понятий и законов цветом и шрифтом:

определения понятий и законов

Также выделены описания:

описания или дополнения к определениям.

Обратите внимание, что векторы в формулах напечатаны жирным шрифтом, например, следующая формула записана для векторов:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

А следующая формула записана с помощью скаляров:

$$L_Z = \rho \cdot p_\tau = \rho \cdot m \cdot v_\tau$$

При просмотре оглавления в электронном варианте лекций можно перейти к главе, нажав CTRL и выбрав ссылку пункта оглавления; обратно можно перейти, нажав CTRL – Home.

В конце каждой главы помещены контрольные вопросы и задачи для самостоятельной работы студентов.

Предмет физики

Физика – наука о наиболее простейших формах движения материи. Она изучает движение тел и причины, вызывающие их движение, то есть силы.

Основой физики является **механика - наука о механическом движении и взаимодействии тел, вызывающем такое движение.**

Современное состояние физики, из каких наук она состоит:

Механика		
Квантовая	***Классическая***	***Релятивистская***
Микромир, свойства вещества, излучения, элементарных частиц	$0 < v < 0{,}01c$	скорость $v \geq 0{,}01\ c$
Силы	***Науки***	
Гравитация	Механика, общая теория относительности	
Электромагнитные	Электродинамика, квантовая механика, …	
Сильные	Ядерная физика, физика элементарных частиц	
Слабые	Физика элементарных частиц	
Количество взаимодействующих тел	***Науки***	
Одно или несколько	Механика	
Большое ($>10^5$):	Молекулярная физика, статистическая физика	
	Физика твердого тела	
	Физика конденсированного состояния	
Вид движения	***Науки***	
Поступательное, вращательное	Механика	
Колебательное, волновое	Оптика, акустика	
Все вышеперечисленные разделы физики могут быть использованы при исследовании		
Химических реакций	Физическая химия	
Земли	Геофизика	
Животных, человека	Биофизика	
Результаты и методы физики используются в технических науках, конструировании, проектировании:		
Сопротивление материалов, материаловедение, металловедение, металлургия, химия, станки и инструменты, приборостроение и т.д.		

Важнейшие этапы развития механики

Механика в своем развитии прошла ряд этапов:

1) классическая или ньютоновская механика - достаточно точно описывает "нормальное" движение (не очень быстрое), например, движение спутников вокруг Земли;

2) релятивистская механика - разработана для описания движения объектов, скорость которых близка скорости света, например, космических лучей - элементарных частиц, попадающих в атмосферу Земли из космоса;

3) квантовая механика - механика, описывающая движение в микромире, у частиц, энергия которых мала по сравнению с энергией макротел, например, свойства атомов хорошо описываются квантовой механикой. На основе квантовой механики развиваются все современные направления в физике: оптика, физика конденсированного состояния, исследования наноматериалов и др.

Роль физики в формировании мышления

Физика - помогает понять материальный мир, физика является основой практически всех инженерных наук, таких, как сопротивление материалов, приборостроение. Знание физики ведет к пониманию основ инженерных наук, то есть физика необходима для формирования вдумчивого инженера, а не бездумного исполнителя расчетных формул, в которые может закрасться ошибка (опечатка).

Как уже отмечалось, механика - наука о механическом движении и взаимодействии тел, вызывающем такое движение.

Механическое движение **- это изменение со временем взаимного расположения тел или частей тел друг относительно друга.**

Механическое взаимодействие между телами приводит к изменению состояния механического движения и деформации рассматриваемых тел.

М Е Х А Н И К А

ТЕМА 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кинематика - раздел механики, в котором дается математическое описание движения тел, без анализа причин движения, то есть без учета сил.

1.1. Элементы кинематики: материальная точка, абсолютно твердое тело, поступательное и вращательное движение

Для упрощения понимания задачи в механике используется понятие материальной точки:

в случае, когда размерами и формой движущегося тела можно пренебречь его можно принять за материальную точку.

В общем случае материальная точка характеризуется массой и *радиус-вектором*.

(Радиус-вектором называется вектор, который начинается в начале координат и оканчивается в описываемой точке).

При изучении движения твердого тела часто его деформация пренебрежимо мала. В этом случае можно пользоваться моделью, которая называется абсолютно твердое тело**.**

Абсолютно твердым телом называется тело, расстояние между двумя точками которого всегда остается постоянным.

Материальная точка может двигаться только поступательно, абсолютно твердое тело может совершать как поступательное, так и вращательное движение.

Поступательным движением **твердого тело считается такое движение, в котором все его точки перемещаются одинаково.**

Вращательным называется движение**, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.**

1.2. Система отсчета

Все тела движутся в пространстве и времени. Невозможно движение без течения времени, в то же время невозможна оценка движения данного тела без его соотношения к другим телам. Для однозначного определения положения тела в произвольный момент времени необходимо выбрать систему отсчета.

Системой отсчета **называется система координат, снабженная часами и жестко связанная с абсолютно твердым телом (телом отсчета), по отношению к которому определяется положение других тел в различные моменты времени.**

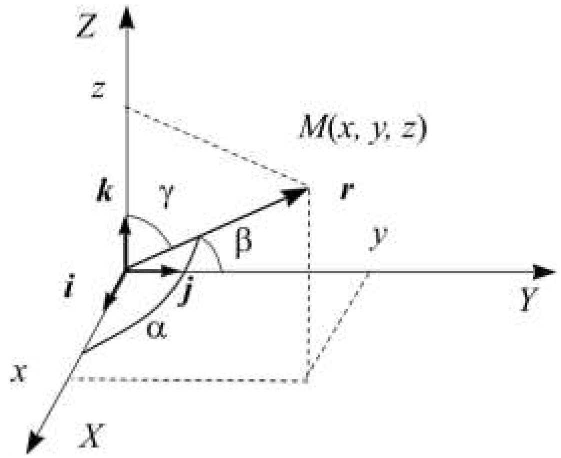


Рис. 1.1

В ньютоновской механике предполагается, что ход часов одинаков во всех системах отсчета. Мы будем называть *земной или лабораторной систему отсчета,* жестко связанную с Землей.

Мы будем пользоваться правой прямоугольной системой координат (см. Рис. 1.1). Здесь ***i, j, k*** — единичные взаимно перпендикулярные векторы, направленные вдоль осей *X,Y,Z*, образующие **ортонормированный** базис.

Положение точки *M* можно описать двумя способами: либо указав тройку проекций *x,y,z*; либо разложив вектор ***r*** по базису векторов ***i, j, k*** на составляющие: $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ (***r*** является суммой этих трех векторов).

Проекции вектора r можно найти по следующим формулам:

$$r_x = r\cos\alpha = x$$

$$r_y = r\cos\beta = y$$

$$r_z = r\cos\gamma = z$$

углы α, β, γ — между осями координат и радиус-вектором ***r***.

1.3. Кинематические уравнения, траектория, длина пути, перемещение, скорость

При движении материальной точки М ее координаты и радиус- вектор изменяются со временем. Для полного описания движения точки необходимы кинематические уравнения:

зависимости от времени трех координат $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ или зависимость от времени радиус-вектора $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(t)$. Эти зависимости равнозначны.

Траекторией **движения материальной точки называется линия, описываемая этой точкой при ее движении относительно выбранной системы координат.**

Длиной пути **называется длина траектории, пройденной материальной точкой, измеренная вдоль направления движения.**

Перемещением называется вектор, соединяющий начало и конец рассматриваемого участка траектории.

Перемещение равно приращению радиус-вектора r материальной точки за рассматриваемый промежуток времени:

$$\Delta\boldsymbol{r} \;=\; \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \;=\; \boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)$$

Для характеристики направления и быстроты движения в механике используется векторная величина, которая называется скоростью.

Средней скоростью материальной точки в промежутке времени от *t* до *t*+Δ*t* называется вектор, равный отношению ее перемещения к промежутку времени Δ*t*:

$$\langle\boldsymbol{v}\rangle = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

Скоростью точки в момент времени t называется вектор, равный первой производной по времени радиус-вектора этой точки:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения материальной точки, поэтому можно записать такие выражения:

$$\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}, \qquad v = |\boldsymbol{v}| = \frac{ds}{dt}$$

1.4. Ускорение и его составляющие: нормальное и тангенциальное ускорения.

Ускорением материальной точки называется вектор, равный первой производной по времени от вектора скорости этой точки:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

Или

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

Если траектория - **плоская кривая (все точки лежат в одной плоскости),** то ускорение лежит также в этой плоскости. Если траектория - пространственная кривая, то ускорение лежит в соприкасающейся плоскости (**соприкасающаяся плоскость в данный момент времени содержит материальную точку и ближайшие точки кривой**).

В соприкасающейся плоскости можно выбрать два основных направления: вдоль кривой – по направлению скорости – τ и нормально скорости *n* в направлении центра кривизны траектории.

Поэтому вектор ускорения удобно разложить на две составляющие.

Составляющая $\boldsymbol{a}_\tau = a_\tau \boldsymbol{\tau}$ называется **касательным** или **тангециальным** ускорением, составляющая $\boldsymbol{a}_n = a_n \boldsymbol{n}$ называется **нормальным** или **центростремительным** ускорением (Рис. 1.2).

$$\boldsymbol{a} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \boldsymbol{a}_\tau + v \cdot \frac{v}{R}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_\tau + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}$$

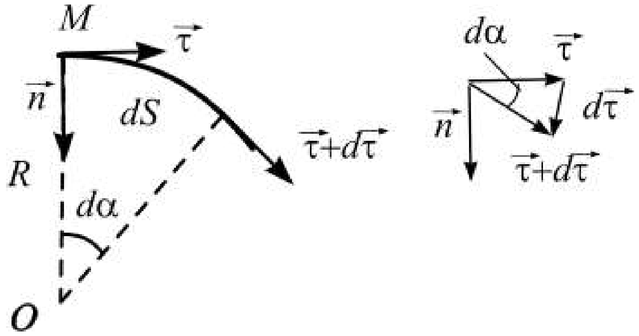


Рис. 1.2

$$\boldsymbol{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}$$

Заметим, что

$$d\tau = \tau d\alpha = d\alpha, \qquad \text{отсюда}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} = \omega = \frac{v}{R}$$

1.5. Прямая и обратная задача кинематики.

Целью решения кинематической задачи является нахождение закона изменения со временем радиус-вектора, характеризующего положение материальной точки. Таким образом, чаще всего, зная изменение скорости и ускорение, либо, зная траекторию и изменение скорости, мы получаем координату точки. В общем случае это возможно с помощью интегрирования исходных уравнений и использования начальных условий.

Возможно решение обратной задачи: по изменению координат точки необходимо получить скорость и ускорение, а также траекторию. Используя уравнения, которые приведены выше для скорости и ускорения несложно получить с помощью дифференцирования координаты в любой момент времени.

1.6. Равнопеременное поступательное движение

Несложным является решение кинематических задач, если движение материальной точки является равнопеременным. Равнопеременным движением называется движение, при котором ускорение точки является постоянным по модулю и направлению.

Задачи, в которых движение было равнопеременным, вы решали в школе и при подготовке к поступлению в вуз. Интегрирование уравнения $\boldsymbol{a} = const$ приводит к известным вам равенствам:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{\boldsymbol{a}t^2}{2}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t$$

Более подробно решение таких задач мы рассмотрим на практических занятиях.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение материальной точки.
2. Дайте определение абсолютно твердого тела.
3. Чем отличается абсолютно твердое тело от материальной точки?
4. Как связаны понятия системы отсчета и системы координат?
5. Дайте определения векторов скорости и ускорения материальной точки. В чем их отличия от средних векторов скорости и ускорения.
6. В чем отличие перемещения материальной точки от длины пути?
7. Что такое соприкасающаяся плоскость?
8. В чем отличие нормального и тангенциального ускорения?
9. Решите задачу: камень бросили с обрыва горизонтально со скоростью 5 *м/с*. Найти его перемещение, скорость, тангенциальное и нормальное ускорение через 2 *с* после броска. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения равно 9,8 м/с^2.
10. Решите задачу: человек начал двигаться с постоянной скоростью 3,6 *км/ч* против хода поезда; в это время поезд начал свое движение с ускорением 0,1 *м/с*^{2}. Найти скорости человека и поезда относительно земли через 20 *с* после начала движения. В какой момент времени скорость человека относительно земли стала равна нулю? Найти перемещения человека и поезда для этого момента времени.

ТЕМА 2. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Как вы записывали при рассмотрении предыдущей темы, абсолютно твердым телом называется модель, в которой предполагается, что при движении тела расстояние между любыми двумя точками этого тела не изменяется, то есть абсолютно твердое тело не деформируется.

2.1. Поступательное движение

Рассмотрим случай (Рис. 2.1) поступательного движения твердого тела – в этом случае все точки перемещаются одинаково: $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B, \boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_B$.

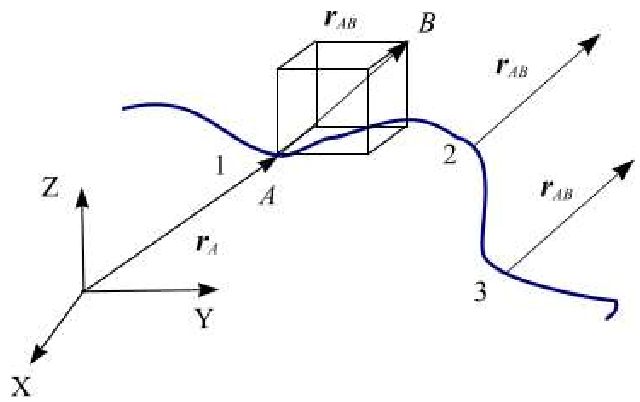


Рис. 2.1

Поэтому мы можем выбрать любую точку тела (точку A) и записать закон ее движения $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_A(t)$. Так как все точки изменяются одинаково, вектор $\boldsymbol{r}_{AB}$ между точками A и B, например, не изменяется со временем.

$$\boldsymbol{r}_{AB} = const$$

Из этого следует, что зная закон изменения положения точки A, мы будем знать закон изменения положения точки B:

$$\boldsymbol{r}_B(t) = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_{AB} = \boldsymbol{r}_A(t) + \boldsymbol{r}_{AB}$$

Поэтому поступательное движение абсолютно твердого тела сводится к движению материальной точки.

2.2. Вращательное движение

Совсем по-другому ведет себя абсолютно твердое тело при **вращательном движении** (Рис. 2.2). Вспомним определение вращательного движения, данное в 1 лекции: при вращении все точки твердого тела движутся по окружностям, причем ось у всех окружностей единая. Эта ось называется **осью вращения**. Рассмотрим ***вращение диска:***

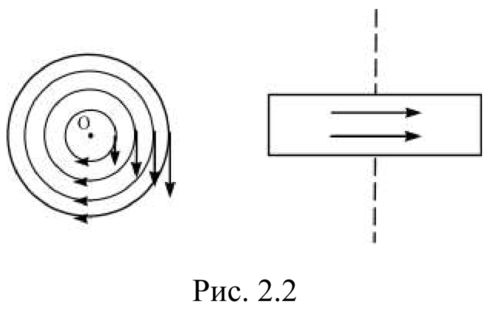


Рис. 2.2

Параметры вращательного движения: угловое перемещение, путь, скорость, ускорение

Для характеристики вращения твердого тела удобно использовать угол поворота, потому что движение различных точек диска не одинаковое, хотя и подобное (отличается путь и скорость) (см. рисунок). Этот угол поворота будет описывать будет являться угловой координатой (аналогично линейной координате материальной точки).

Выберем на диске точку A (Рис. 2.3), движение которой будем описывать углом поворота отрезка OA: $\varphi = \varphi(t)$, начальное положение будем считать нулевым, при повороте против часовой стрелки $\varphi > 0$, по часовой – $\varphi < 0$.

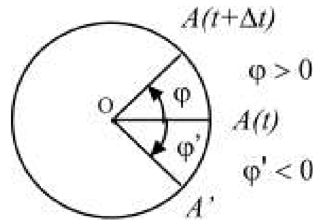


Рис. 2.3

По аналогии с поступательным движением материальной точки введем понятия:

<u>Угловое перемещение:</u> разница между угловой координатой $\boldsymbol{\varphi}$ в конечный и начальный момент времени $\Delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi_2} - \boldsymbol{\varphi_1} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t_2}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t_1})$.

<u>Угловой путь</u>: суммарный угол, на который повернется абсолютно твердое тело, измеряемый в направлении движения.

Пусть тело совершает угловое перемещение на угол $\boldsymbol{\varphi_1}$, затем вернется в исходное положение (Рис. 2.4).

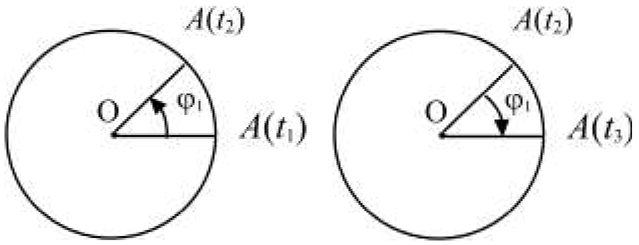


Рис. 2.4

В данном случае угловое перемещение равно нулю, а суммарный угловой путь составит $\boldsymbol{\varphi}_{\text{путь}} = 2\boldsymbol{\varphi_1}$, по аналогии с путем поступательного движения материальной точки.

Вспомним определение **пути** материальной точки: это длина траектории, измеренная в направлении движения материальной точки. Если точка двигалась из пункта 1 в пункт 2, а затем обратно по той же траектории, тогда:

$$S = S_1 + S_2 = 2S_1$$

<u>Средняя угловая скорость</u> – это отношение углового перемещения ко времени, за которое произошло перемещение

$$\langle\omega\rangle = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

<u>Угловая скорость</u> – производная по времени от угловой координаты

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

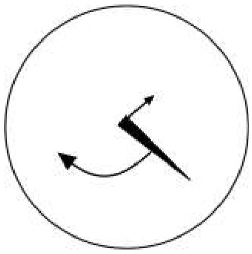


Рис. 2.5

Если ось вращения тела может поворачиваться, используется представление об угловой скорости как о векторе:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$$

Причем вектор угловой скорости проходит вдоль оси вращения, а направление определяется правилами правого винта. Начало вектора угловой скорости может быть расположено в любой точке оси вращения.

Например, когда мы смотрим на стрелки часов, вектор угловой скорости направлен вдоль оси вращения от нас (Рис. 2.5).

<u>Угловое ускорение</u> равно производной от угловой скорости по времени.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

в векторном виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

Если ось вращения неподвижна (случай, который мы будем рассматривать) достаточно скалярного уравнения $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$.

2.3. Связь линейных и угловых характеристик движения

Все точки абсолютно твердого тела при вращении движутся различно, однако, если выделить одну точку тела, то легко записать связь линейных и угловых характристик движения.

Выберем на ободе диска радиусом R точку A.

Перемещение (Рис. 2.6) равно $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ по модулю:

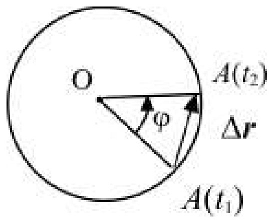


Рис. 2.6

$$\Delta r = 2R\sin(\varphi/2)$$

Путь точки

$$S_{12} = R \cdot \varphi$$

(из определения радианной меры угла: $\varphi = \frac{\text{дуга окружности}}{\text{радус}} = \frac{S}{R}$).

Линейная скорость

$$v = \omega R \quad \Leftarrow$$

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(R\varphi) = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории (Рис. 2.7).

Ускорение $\boldsymbol{a}$ определяется формулой, выведенной на предыдущей лекции:

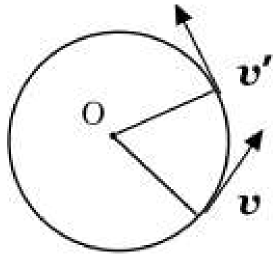


Рис. 2.7

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}$$

Здесь первое слагаемое – тангенциальное ускорение, второе – нормальное ускорение. Запишем это уравнение с учетом угловых характеристик.

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon$$

– тангенциальное ускорение.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^{\cancel{2}}\omega^2}{\cancel{R}} = R\omega^2$$

– центростремительное ускорение.

$$\boldsymbol{a} = R\varepsilon\boldsymbol{\tau} + R\omega^2\boldsymbol{n} \quad ; \quad |\boldsymbol{a}| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

– линейное полное ускорение.

2.4. Равнопеременное вращение

Рассмотрим случай равнопеременного вращения абсолютно твердого тела, то есть такого движения, при котором угловое ускорение постоянно $\varepsilon = const$. Проинтегрируем это равенство.

$$\omega(t_1) - \omega(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon\, dt = \varepsilon(t_1 - t_0)$$

$$\omega(t_1) = \omega(t_0) + \varepsilon(t_1 - t_0), \quad \text{или, при } t_0 = 0$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\varphi(t)-\varphi_0=\int_0^t(\omega_0+\varepsilon t)\,dt=\omega_0 t+\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\varphi(t)=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Как вы видите, уравнения аналогичны кинематическим уравнениям движения материальной точки, знакомым вам со школы:

$$v_x(t)=v_{0x}+a_x t$$

$$x(t)=x_0+v_{0x}t+\frac{a_x t^2}{2}$$

При решении задач на равнопеременное вращение мы можем использовать приемы, знакомые вам по задачам о поступательном движении. Например, если в условии дано уравнение вращения твердого тела:

$$\varphi(t)=1+2t-2t^2,$$

можно сразу указать, что начальный угол $\varphi_0=1$ рад, начальная угловая скорость $\omega_0=2$ рад/с, угловое ускорение $\varepsilon=-4$ рад/с^2.

Рассмотрим случай простого движения абсолютно твердого тела, совмещающего вращение и поступательное движение. Это – плоское движение – качение.

Плоским движением абсолютно твердого тела называется такое движение, в котором все его точки движутся в параллельных плоскостях.

В этом случае проекция твердого тела на плоскость (лист бумаги) полностью описывает движение, то есть для описания движения достаточно двух измерений.

2.5. Качение цилиндра – пример плоского движения.

Рассмотрим вначале вращение цилиндра при движении, для этого свяжем систему $X'Y'$ координат с осью цилиндра. В этой системе координат ось цилиндра неподвижна, вращение происходит с угловой скоростью $\omega=v/R$, где v – скорость земли относительно оси (Рис. 2.8). Центростремительное и полное ускорение: $a_n=R\omega^2$ – на ободе цилиндра. Выберем систему координат XY, в ней система координат $X'Y'$ движется со скоростью $\boldsymbol{v}$.

Точка *A* обода движется со скоростью $2\boldsymbol{v}$, по формуле вычисления скорости в движущейся системе координат:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}',$$

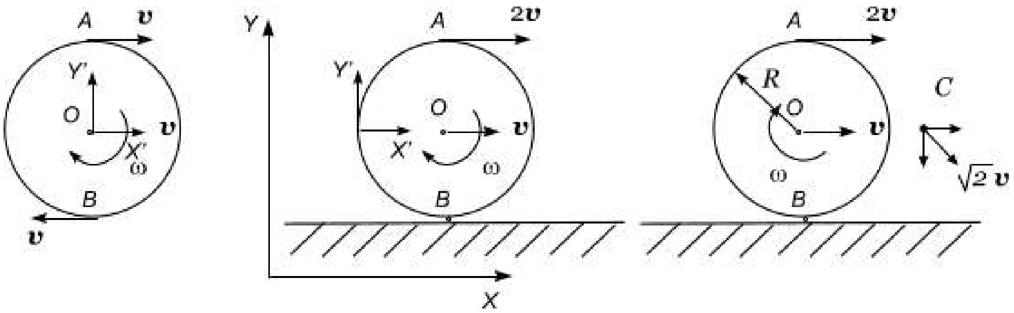


Рис. 2.8

здесь $\boldsymbol{u}$ – скорость системы координат, $\boldsymbol{v}'$ – скорость тела относительно движущейся системы координат, $\boldsymbol{v}$ – скорость тела относительно неподвижной системы координат.

Так как цилиндр движется с постоянной скоростью, ускорение точки *A* одинаково в обеих системах координат: в движущейся системе координат $a_n = v^2/R$, в неподвижной системе координат $a_n = 4v^2/R'$. Отсюда

$$\frac{v^2}{R} = \frac{4v^2}{R'} \quad \rightarrow$$

$$R' = 4R,$$

R'– радиус кривизны траектории точки *A* в неподвижной системе координат *XY*. Для точки *C*: $v_C = v\sqrt{2}$.

Итак: при качении цилиндра ось вращения движется со скоростью $\boldsymbol{v}$**,** скорость верхней точки – $2\boldsymbol{v}$**,** нижняя с нулевой скоростью, точка *C*: $v_C = v\sqrt{2}$.

Радиус кривизны траектории точек на ободе в движущей системе координат равен *R* – радиусу цилиндра, в неподвижной системе координат равен 4*R*.

Радиус кривизны траектории точки *C*: $R_C = 2\sqrt{2}R$. Выведем эту формулу.

$$v' = \sqrt{2}v \;\; \longrightarrow$$

$$\frac{v'^2}{R'} = \frac{2v^2}{R'} = a'_n$$

$$a'_n = a\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{v^2}{R}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\cancel{v^2}}{R}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\cancel{v^2}}{R'}$$

Радиус кривизны $R' = 2\sqrt{2}R$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение поступательного и вращательного движения.
2. Дайте определение углового перемещения и углового пути, угловой скорости и ускорения.
3. Могут ли быть равными угловое перемещение и угловой путь?
4. Что такое равнопеременное вращение? Запишите уравнения угловой скорости и координаты в зависимости от времени.
5. Что такое плоское движение? Приведите примеры такого движения.
6. Решите задачу: диск радиусом 50 *см* начинает вращаться с постоянным угловым ускорением, равным 0,4 *рад/с*^{2}. Найти для момента времени 5 *с* его угловую скорость, угловое перемещение, а также линейную скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорение точки на внешней поверхности диска.
7. Решите задачу: автомобиль движется с постоянной скоростью 144 *км/ч*. Диаметр шин автомобиля – 500 *мм*. Найти угловую скорость, нормальное ускорение внешних точек колес автомобиля относительно их оси. Найти линейную скорость верхних и нижних точек колес относительно дороги.

ТЕМА 3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Динамика – часть механики, в которой рассматривается как движение тел, так и причины, вызывающие его, то есть силы.

Сила – это векторная величина, являющаяся мерой взаимодействия тел.

Сила $\boldsymbol{F}$ полностью задана, если указан ее модуль F, направление в пространстве и точка приложения.

Взаимодействие тел осуществляется посредством физических полей. Поле – особая форма материи, передающая с конечной скоростью действие одного тела на другое. Например, взаимодействие удаленных тел осуществляется посредством гравитационных и электромагнитных полей.

Существует различные виды сил. Их можно подразделить с учетом видов полей, участвующих во взаимодействии (открыты 4 вида полей): 1. Гравитационное. 2. Электромагнитное. 3. Ядерное (сильное). 4. Слабое (взаимодействие элементарных частиц).

Недавно открыто новое, пока еще непонятное взаимодействие, которое было названо ***темная энергия***. Это взаимодействие отвечает за ускоренное разбегание галактик во Вселенной. Возможно, что это взаимодействие можно будет отнести к пятому типу.

Также существует несколько видов сил, являющиеся результатом взаимодействия большого числа атомов: 1. Сила трения. 2. Сила сопротивления жидкости или газа (вязкость). 3. Сила упругости. 4. Сила давления.

Рассмотрим некоторые из приведенных выше сил:

1. Сила гравитации

$$F = G\frac{Mm}{r^2},$$

где $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н}*\text{м}^2}{\text{кг}^2}$, M, m – массы взаимодействующих тел, r – расстояние между центрами масс.

2. Сила тяжести – это сила гравитационного притяжения Земли (или другой планеты):

$$F = mg = G\frac{Mm}{r^2} \rightarrow g = G\frac{M}{{R_З}^2}$$ – ускорение свободного падения

3. Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = kN,$$

k – коэффициент трения, N – сила реакции опоры.

4. Сила упругости

$$F_{упр} = -kx,$$

где k – коэффициент упругости, x – сдвиг тела из состояния равновесия (растяжение пружины). Минус показывает, что сила направлена против направления сдвига.

Тело называется <u>свободным</u>, если на его движение нет никаких ограничений.

Например: полет ракеты.

В природе и технике обычно на движение тела наложены те или иные ограничения, называемые **связями**.

<u>Принцип освобождаемости</u>: несвободное тело можно рассматривать как свободное, если заменить действие на него тел, осуществляющих связи, силами, называемыми <u>реакциями</u> связей (реакция опоры, реакция нити).

Все остальные силы называются **активными** силами. Кроме сил в динамике появляются следующие понятия.

Масса – положительная величина, являющаяся мерой инертности тела.

$m = \frac{F}{a}$ – инертность тела больше, если при действии одной и той же силы у данного тела ускорение меньше.

Масса – аддитивная величина, масса тела равна сумме масс частей тела.

Вектор *p*, равный произведению массы тела на его скорость, называется импульсом тела.

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

Раньше в физике импульс назывался количеством движения.

Вектор $\boldsymbol{F}dt$ называется элементарным импульсом силы, действующей на тело.

Импульс силы за конечный промежуток времени:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}dt = \langle \boldsymbol{F} \rangle (t_2 - t_1)$$

Здесь $\langle \boldsymbol{F} \rangle$ – средняя сила за время от t_1 до t_2.

В основе классической механики лежат три закона Ньютона:

1 закон:

Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока внешнее воздействие не изменит это состояние.

Замечания: а) явно этот закон действует только по отношению к материальной точке; б) существуют системы отсчета, в которых этот закон не выполняется – **неинерциальные** системы отсчета; в) существуют системы отсчета, в которых этот закон выполняется – **инерциальные** системы отсчета (эти системы отсчета неподвижны друг относительно друга или движутся с постоянной скоростью). С большой точностью **гелиоцентрическую** систему отсчета можно считать инерциальной: начало отсчета – в центре масс солнечной системы, оси координат направлены на 3 звезды.

2 закон Ньютона: основной закон динамики материальной точки.

Ускорение материальной точки пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$$

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{p}'(t)$$

$$\boldsymbol{F}dt = d\boldsymbol{p} \quad \rightarrow \langle \boldsymbol{F} \rangle (\boldsymbol{t_2} - \boldsymbol{t_1}) = \boldsymbol{p_2} - \boldsymbol{p_1}$$

Вторая формулировка 2 закона Ньютона:

Импульс силы, действующий на материальную точку в течении времени от t_1 до t_2, равен изменению импульса этой материальной точки.

$$\langle \boldsymbol{F} \rangle (t_2 - t_1) = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1$$

3 закон Ньютона:

Две материальные точки действуют друг на друга с силами равными по модулю и противоположными по направлению.

Пример: определение веса тела.

Вес тела – это сила, с которой тело действует на опору.

По третьему закону Ньютона вес тела равен силе реакции опоры $P = N$. Это соотношение упрощает во многих задачах нахождение веса тела. Также III закон Ньютона упрощает решение задач, в которых рассматривается система из *N* материальных точек.

3.2. Центр масс. Система из N материальных точек. Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему из *N* материальных точек.

Введем понятие центра масс системы:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Как ведет себя центр масс системы под действием сил?

Рассмотрим II закон Ньютона в применении к этой системе: пусть есть **внешние** тела, не входящие в систему, тогда они действуют на систему посредством **внешних сил**. Силы взаимодействия внутри системы будем называть **внутренними**.

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}} + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ik} \ \leftarrow \ \text{сила, действующая}$$

$$\text{на } i - \text{ю материальную точку}$$

II закон Ньютона для *i*-ой точки:

$$m_i \boldsymbol{a_i} = \boldsymbol{F}_i$$

– суммируем уравнения для всех *N* материальных точек:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a_i} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ik}$$

Заметим, что $\boldsymbol{F}_{ik} = -\boldsymbol{F}_{ki}$ по III закону Ньютона, тогда для любой пары индексов *ik* найдется соответствующая пара *ki.*

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ik} = 0 \ \rightarrow \ \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}}$$

рассмотрим

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{a_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\boldsymbol{v_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d(m_i \boldsymbol{v_i})}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{p_i}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p_i}$$

<u>Импульсом механической системы</u> называется сумма импульсов материальных точек системы.

$$\boldsymbol{p}_S = \sum_{i=1}^{N} p_i \rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i a_i = \frac{d\boldsymbol{p}_S}{dt}$$

Назовем <u>главным вектором внешних сил</u> геометрическую сумму всех внешних сил, действующих на систему материальных точек.

$$\boldsymbol{F}_{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{i\ \text{внеш}}$$

Отсюда получим аналог второго закона Ньютона для системы материальных точек:

$$\frac{d\boldsymbol{p_S}}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{внеш}}$$

<u>Производная по времени импульса системы равна главному вектору внешних сил.</u>

С учетом полученных уравнений посмотрим, как будет двигаться центр масс системы:

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt} = \boldsymbol{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\boldsymbol{p_S}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{p_S} = \boldsymbol{v}_c \sum_{i=1}^{N} m_i = \boldsymbol{v}_c m$$

Подставим в полученное выражение

$$\frac{d\boldsymbol{p_S}}{dt} = m \frac{d\boldsymbol{v}_c}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{внеш}}$$

Из уравнения следует, что

<u>Центр масс механической системы</u> движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил.

Предположим, что система замкнута, тогда

$$\boldsymbol{F}_{\text{внеш}} = 0, \text{ отсюда}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}_S}{dt} = 0 \text{ или } \boldsymbol{p}_S = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = const, \quad \text{то есть}$$

мы получили **закон сохранения импульса:**

В замкнутой системе векторная сумма импульсов всех материальных точек системы постоянна по модулю и направлению.

<u>Следствие: в замкнутой системе скорость центра масс постоянна.</u>

В сложных задачах, если сумма внешних сил равна нулю, можно перейти в систему отсчета, связанную с центром масс. При этом многие формулы упрощаются.

3.3. Уравнение Мещерского, реактивная сила, формула Циолковского

Интерес к движению тел с переменной массой появился с первыми идеями о ракетостроении (2-я половина 19 века). Кроме ракет, которые выбрасывают топливо (их масса уменьшается), можно придумать пример, когда масса возрастает (движущаяся платформа, на которую сыплется песок).

Иван Всеволодович Мещерский (1897 г.) составил дифференциальное уравнение, которое работоспособно для обоих случаев (убывания и возрастания массы). Выведем это уравнение.

Рассмотрим характеристики ракеты до и после выброса порции топлива:

До: импульс ракеты $\boldsymbol{p}_1 = m\boldsymbol{v}$

После: импульс ракеты $\boldsymbol{p}_2 = (m + dm)(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})$

импульс порции топлива $d\boldsymbol{p}_{\text{т}} = (-dm)\boldsymbol{v}_{\text{т}}$, так как $dm < 0$

Изменение импульса:

$$\boldsymbol{p}_2 + d\boldsymbol{p}_{\text{т}} - \boldsymbol{p}_1 = (m + dm)(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}) - dm\boldsymbol{v}_{\text{т}} - m\boldsymbol{v} =$$

$$= \underbrace{\cancel{m\boldsymbol{v}}} + \boldsymbol{v}dm + md\boldsymbol{v} + \cancel{dmd\boldsymbol{v}} - dm\boldsymbol{v}_{\text{т}} - \underbrace{\cancel{m\boldsymbol{v}}}$$

$$= d\boldsymbol{p}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\text{т}})\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{внеш}}$$

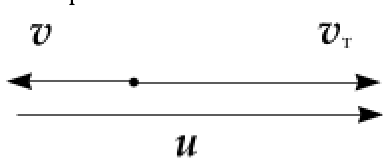


Рис. 3.1

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_\text{т} - \boldsymbol{v}$ – скорость топлива относительно ракеты (см. Рис. 3.1)

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \boldsymbol{u}\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{F}_\text{внеш}$$

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_\text{внеш} + \boldsymbol{u}\frac{dm}{dt}$$

здесь $\boldsymbol{F}_\text{р} = \boldsymbol{u}\frac{dm}{dt}$ – реактивная сила.

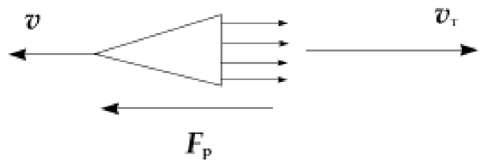


Рис. 3.2

Реактивная сила направлена против $\boldsymbol{u}$ (Рис. 3.2), так как $\frac{dm}{dt} < 0$.

Реактивная сила характеризует механическое воздействие на тело отделяющихся от него или присоединяющихся к нему частиц.

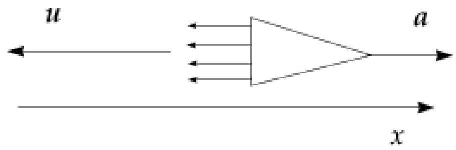


Рис. 3.3

Константин Эдуардович Циолковский всю жизнь посвятил разработке теории ракетостроения и применения ракет для полета в космос. Его занимал вопрос: какую максимальную скорость может развить ракета?

Предположим, что ракета стартует в открытом космосе, тогда можно считать $\boldsymbol{F}_\text{внеш} = 0$, так как сила тяжести равна нулю. Запишем уравнение Мещерского

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}\frac{dm}{dt}$$

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{u}\frac{dm}{dt}, \text{спроецируем на ось } x \text{ (Рис. 3.3)}$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = -u\frac{dm}{dt}$$

$$m\,dv_x = -udm$$

$$dv_x = -u\frac{dm}{m} - \text{проинтегрируем уравнение}$$

Пусть m_0 – начальная масса ракеты, $m^* = m_0 - m_\text{т}$ – конечная масса.

$$\int_0^{v_{max}} dv_x = -u\int_{m_0}^{m^*}\frac{dm}{m}$$

$$v_{max} = -u(\ln m^* - \ln m_0) = u(\ln m_0 - \ln m^*) = u\ln\frac{m_0}{m^*}$$

Формула Циолковского (1903 г.) определяет максимальную скорость ракеты, которая называется характеристической скоростью

$$v_{max} = u \ln \frac{m_0}{m_0 - m_т}$$

При взлете с Земли, из-за преодоления тяготения и сопротивления воздуха, скорость ракеты оказывается значительно меньше характеристической скорости.

Задача. Платформа начинает двигаться вправо под действием постоянной силы ***F***. Из неподвижного бункера на нее сыпется песок (см. Рис. 3.4). Скорость погрузки постоянна и равна μ кг/с. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы.

Дано:
m_0
$\boldsymbol{F}$
$\mu \left[\frac{кг}{с}\right]$
$v = ?$ $a = ?$

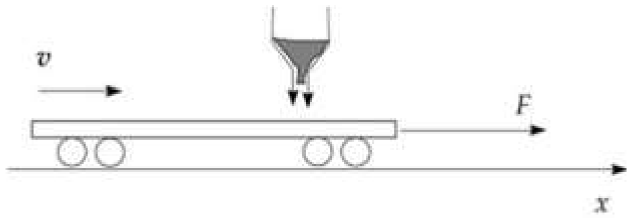


Рис. 3.4

Уравнение Мещерского

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{внеш} + \boldsymbol{u}\frac{dm}{dt}$$

$\frac{dm}{dt} > 0,$ относительная скорость $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{v}$

$$0x: \quad ma = m\frac{dv}{dt} = F_x - v\frac{dm}{dt} \;\; \rightarrow$$

$$F_x = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \quad \rightarrow \text{интегрируем}$$

$$mv = Ft \;\; \rightarrow \;\; v = \frac{Ft}{m} = \frac{Ft}{m_0 + \mu t}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{(Ft)'(m_0 + \mu t) - (Ft)(m_0 + \mu t)'}{(m_0 + \mu t)^2} = \frac{F(m_0 + \mu t) - (Ft)\mu}{(m_0 + \mu t)^2}$$

$$= \frac{Fm_0}{(m_0 + \mu t)^2}$$

Контрольные вопросы

1. В чем отличие динамики от кинематики материальной точки?
2. Дайте определение понятия силы.
3. Дайте определение поля. Какие есть фундаментальные взаимодействия (взаимодействия, определяемые видом поля)?
4. Сформулируйте принцип освобождаемости.
5. Дайте определение массы, импульса тела, импульса силы. Сформулируйте три закона Ньютона.
6. Дайте определение центра масс системы материальных точек. Что такое импульс механической системы, главный вектор внешних сил?
7. Как движется центр масс системы материальных точек? Сформулируйте закон сохранения импульса.
8. Что такое реактивная сила? Запишите уравнение Мещерского и объясните его смысл. Что определяет формула Циолковского?
9. Решите задачу: груз массой 0,9 *кг* привязан к шнуру и лежит на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения груза с поверхностью равен 0,3. С какой силой нужно горизонтально тянуть за шнур, чтобы ускорение груза было равно 1 $м/с^2$? Какова может быть максимальная сила, приложенная к шнуру, при которой груз не двигается с места? Каково будет ускорение груза, если сила, приложенная к шнуру равна 10 *Н*?
10. Решите задачу: скорость истечения топлива первой ступени ракеты «Союз» v = 2,5 *км/с*, масса топлива 39 т, масса ракеты без топлива - 4 т. Какую скорость приобретет первая ступень ракеты в космосе, в предположении ее старта вне поле тяжести Земли?

ТЕМА 4. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение абсолютно твердого тела можно представить, как поступательное движение центра масс и вращение вокруг оси. Ось может менять свое положение и направление. Динамика вращательного движения твердого тела чаще всего будет посвящена вращению вокруг фиксированной оси, однако, в общем случае ось не зафиксирована.

Рассмотрим момент силы относительно точки.

<u>Моментом силы относительно выбранной точки</u> называется векторное произведение радиус-вектора, направленного из точки *O* в точку *N* приложения силы *F*, на эту силу:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

Вектор $\boldsymbol{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{F}$ (Рис. 4.1), его направление определяется правилом правого буравчика.

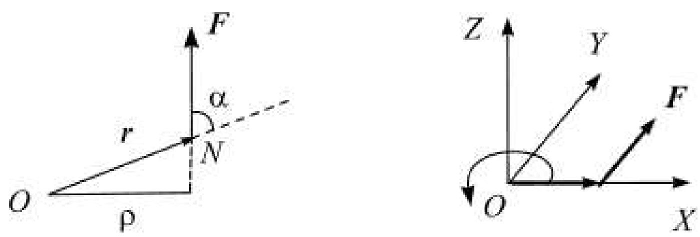


Рис. 4.1

$$M = r \cdot F \sin\alpha = \rho F,$$

$\rho = r\sin\alpha$ называется <u>плечом силы</u>.

Если нам известна ось вращения, то мы можем опеределить момент силы относительно оси:

Моментом силы относительно неподвижной оси называется проекция момента силы относительно точки *O*, принадлежащей оси, на эту ось.

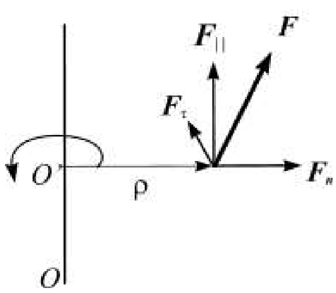


Рис. 4.2

Для облегчения понимания разложим вектор силы $\boldsymbol{F}$ на три составляющие: $F_{\parallel}$ – параллелен оси, F_{n} – направлен в плоскости, нормальной оси от оси, F_{τ} – вектор лежит в этой плоскости перпендикулярно нормальной составляющей (F_{τ} создает круговое движение вокруг оси) (Рис. 4.2).

Проекция моментов сил $F_{\parallel}$ и F_{n} на направление оси равно нулю, поэтому будет учитываться только тангенциальная составляющая F_{τ}.

Пусть ось направлена вдоль оси Z. Тогда плечо силы F_{τ}: $r\sin\alpha = \rho$ – расстояние от точки приложения силы до оси. Тогда проекция момента силы на ось Z:

$$M_Z = \rho F_\tau,$$

здесь F_τ – проекция вектора силы на направление $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{v}/v$, где $\boldsymbol{v}$ – вектор скорости точки твердого тела.

Рассмотрим такую характеристику вращения твердого тела и материальной точки, как момент импульса.

<u>Моментом импульса материальной точки</u> относительно выбранной точки *O* называется векторное произведение:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

<u>Моментом импульса материальной</u> точки относительно оси вращения называется проекция момента импульса материальной точки относительно точки *O*, принадлежащей оси, на эту ось.

$$L_Z = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})_Z = \rho \cdot p_\tau = \rho \cdot m \cdot v_\tau$$

Так как ось вращения направлена по оси Z, тангенциальная составляющая вектора импульса лежит в плоскости XY и направлена по нормали к вектору ρ – расстоянию от материальной точки до оси вращения.

<u>Моментом импульса абсолютно твердого тела</u> относительно выбранной точки *O* называется интеграл:

$$\boldsymbol{L} = \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{dp}$$

При интегрировании мы разбиваем твердое тело на материальные точки, затем суммируем.

<u>Моментом импульса абсолютно твердого тела</u> относительно оси вращения называется величина:

$$L_Z = \left(\int r \times \boldsymbol{d}p\right)_Z = \int \rho \cdot dp_\tau = \int \rho\, d(mv) = |v = \rho\omega| =$$

$$= \int \rho^2 \omega\, dm = \omega \int \rho^2 dm \rightarrow$$

$$L_Z = \omega \int \rho^2 dm \quad \text{или} \quad L_Z = \omega I$$

Для интегрирования необходимо разбить твердое тело на небольшие части массой dm, вычислить для них расстояние ρ до оси вращения и проинтегрировать.

Как видно из формулы, величина $I = \int \rho^2 dm$ не зависит от сил и движения, а зависит только от распределения массы твердого тела. Эта величина называется <u>моментом инерции</u> твердого тела относительно выбранной оси.

Если при рассмотрении импульса $p = mv$ мы характеризовали массу как меру инертности тела, то аналогичная величина при вращении – момент инерции (вспомним, что момент импульса $L = I\omega$). Таким образом, момент инерции – мера инертности при вращательном движении. Посчитаем эту величину для различных объектов.

1) Материальная точка:

$$I = m\rho^2,$$

где m – масса материальной точки, ρ – расстояние от материальной точки до оси.

2) Кольцо, тонкостенный цилиндр:

Формула момента инерции: $I = \int \rho^2 dm$**.** У этого тела все точки находятся на одном и том же расстоянии до оси, поэтому расстояние ρ – константа и ее можно вынести из-под знака интеграла : $I = \rho^2 \int dm = m\rho^2$ – формула совпадает с формулой для материальной точки.

3) Стержень: пусть стержень длиной l, массой m перпендикулярен оси, ось проходит через его конец.

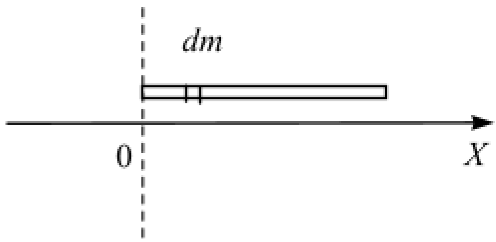


Рис. 4.3

Для вычисления будем использовать линейную плотность: $\tau = \frac{m}{l}$. Бесконечно малый кусочек имеет массу $dm = \tau dx$ (Рис. 4.3), тогда

$$dI = x^2 \tau dx$$

$$I = \tau \int_0^l x^2 dx = \tau \frac{x^3}{3}\bigg|_0^l = \tau \frac{l^3}{3} = \frac{m}{l}\frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

$$I = \frac{ml^2}{3}$$

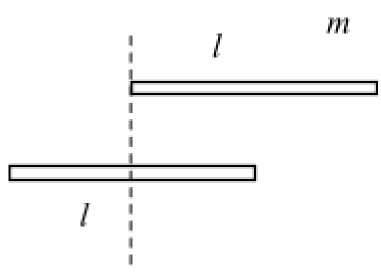
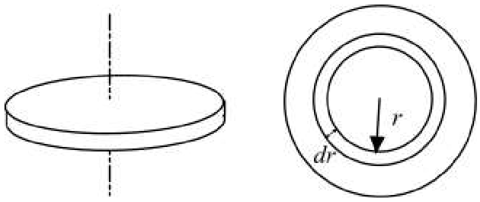


Рис. 4.4

Если стержень вращается вокруг своей середины (Рис. 4.4), тогда его можно представить как два стержня длиной $l/2$, массой $m/2$.

$$I = \frac{2 * \frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2}{3} = \frac{ml^2}{12}$$

4) Вычисление момента инерции диска: пусть ось вращения однородного диска радиуса R, массой m совпадает с его осью симметрии. Рассчитаем его момент инерции. Разобьем диск на кольца (Рис. 4.5). Каждое кольцо имеет радиус r и ширину dr. Вычислим поверхностную плотность диска



$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\pi R^2} \quad \rightarrow$$

Масса кольца $dm = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi r dr$

Как нам известно, момент инерции кольца $I = mr^2 \rightarrow$ для данного кольца:

$$dI = r^2 dm = r^2 \sigma \cdot 2\pi r dr = 2\pi\sigma r^3 dr$$

$$I = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \pi\sigma\frac{R^4}{2} = \pi\frac{m}{\pi R^2}\frac{R^4}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

4.2. Теорема Штейнера

Момент инерции I_a тела относительно произвольной оси a равен сумме момента инерции I_C тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс C тела, и произведения массы на квадрат расстояния между этими осями.

$$I_a = I_C + md^2$$

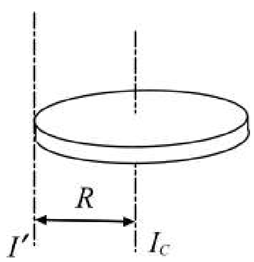


Рис. 4.6

Пример применения теоремы Штейнера.

Пусть диск вращается вокруг оси, параллельной собственной оси диска и касающейся края диска (Рис. 4.6):

$$I' = I_C + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

4.3. Основной закон динамики вращательного движения. Закон сохранения момента импульса.

Пусть есть система, состоящая из N материальных точек, тогда ***моментом импульса относительно неподвижной точки*** называется

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

Главным моментом внешних сил вокруг этой же точки называется

$$\boldsymbol{M}_{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{M}_{i\,\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

Основным законом вращательного движения является закон изменения момента импульса системы:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}_{\text{внеш}}$$

Производная по времени <u>момента импульса системы материальных точек</u> относительно неподвижной точки равна <u>главному моменту внешних сил</u> относительно той же точки.

Абсолютно твердое тело является системой материальных точек, поэтому для него можно сформулировать такой же закон.

Основным законом динамики вращательного движения для него является закон изменения момента импульса абсолютно твердого тела:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}$$

Производная по времени от <u>момента импульса абсолютно твердого тела</u> относительно неподвижной точки равна векторной сумме всех моментов сил, действующих на это тело, относительно той же точки.

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, тогда это уравнение упрощается. Пусть ось вращения параллельна оси Z, тогда изменение момента импульса определяется проекцией суммы моментов сил относительно оси Z.

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z$$

$$L_Z = I_Z \omega_Z$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon \quad \rightarrow$$

$$I\varepsilon = M_Z$$

Пусть на систему не действуют внешние силы, тогда

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{L} = const$$

Мы получили закон сохранения момента импульса:

Момент импульса системы материальных точек относительно неподвижной точки сохраняется, если главный момент внешних сил равен нулю.

Этот закон работает также для проекций (выбранных осей):

Момент импульса системы материальных точек (твердого тела) относительно неподвижной оси сохраняется, если проекция на эту ось векторной суммы моментов внешних сил равна нулю.

$$L_Z = const, \text{ если } \; M_Z = 0$$

4.4. Решение задач по теме «Динамика твердого тела»

Рассмотрим несколько примеров по динамике твердого тела и закону сохранения момента импульса.

Дано:
R
M
m
a –?

Задача 1. На блок массы M в форме диска радиусом R наброшена нить, к которой прикреплен груз массой m. С каким ускорением будет двигаться этот груз, если пренебречь трением (см. Рис. 4.7).

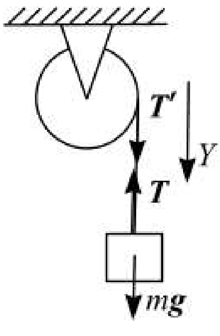


Рис. 4.7

Это задача на применение основного закона вращательного движения.

В проекции на ось *OY:*

$$ma = mg - T$$

основное уравнение вращательного движения:

$$I\varepsilon = M = R \cdot T'$$

$$T' = T$$

$$T = \frac{I\varepsilon}{R} = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{R}\varepsilon = \frac{1}{2}Ma$$

$$ma = mg - \frac{1}{2}Ma$$

$$ma + \frac{1}{2}Ma = mg$$

$$a = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M}$$

Дано:
m_1 R_1
m_2 R_2
ω_1
$\omega_2 = 0$

$\omega' - ?$

Задача 2. Два диска имеют единую вертикальную ось (Рис. 4.8). Верхний диск массой m_1 радиуса R_1 вращается с угловой скоростью ω_1, нижний диск массой m_2 радиуса R_2 не вращается $\omega_2 = 0$. Верхний диск опускают на нижний, и они, в результате действия силы трения, начинают вращаться как единое целое. Найти угловую скорость вращения дисков.

$$I_1 = \frac{1}{2}m_1{R_1}^2$$
$$I_2 = \frac{1}{2}m_2{R_2}^2$$

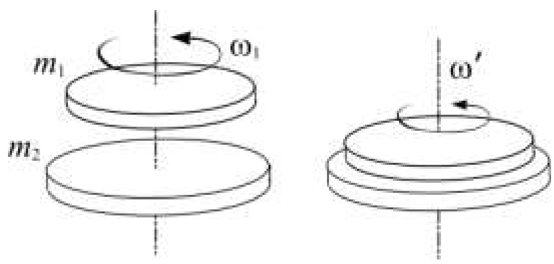


Рис. 4.8

Так как момент внешних сил равен нулю, выполняется закон сохранения момента импульса.

$$I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega'$$

$$\omega' = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_1 = \frac{\frac{1}{2}m_1{R_1}^2}{\frac{1}{2}m_1{R_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{R_2}^2}\omega_1 = \frac{\omega_1}{1 + \frac{m_2{R_2}^2}{m_1{R_1}^2}}$$

Получили угловую скорость обоих дисков.

Дано:
m_0
v_0
x
l
m

Задача 3. Пуля массой m_0 летит горизонтально со скоростью v_0 и попадает в стержень массой m длиной l и застревает в нем (Рис. 4.9). Чему равна угловая скорость системы, если пуля застревает на расстоянии x от шарнира, в котором стержень прикреплен к потолку.

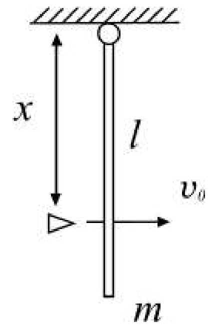


Рис. 4.9

Во время удара момент внешних сил относительно оси вращения в шарнире равен нулю, поэтому выполняется закон сохранения момента импульса (сила тяжести направлена вертикально и продолжение ее вектора проходит сквозь шарнир, сила реакции опоры также проходит через шарнир, то есть плечи этих сил равны нулю).

Момент импульса системы до удара:

$$L_1 = m_0 v_0 x$$

Момент импульса системы после удара:

$$L_2 = I_{\text{ст}}\omega + m_0 v' x =$$

$$= \frac{1}{3}ml^2\omega + m_0 x^2\omega = \omega\left(\frac{1}{3}ml^2 + m_0 x^2\right)$$

$$m_0 v_0 x = \omega\left(\frac{1}{3}ml^2 + m_0 x^2\right)$$

Угловая скорость системы после удара:

$$\omega = \frac{m_0 v_0 x}{\frac{1}{3}ml^2 + m_0 x^2}$$

Дано:
I_0
$2m_0$
ω_0
R_0
R_1

Задача 4. Скамья Жуковского. Человек и скамья имеют общий момент инерции I_0. В руках он имеет гири массой $2m_0$ (Рис. 4.10). Скамью с человеком раскручивают до угловой скорости ω_0, гири расположены на расстоянии R_0 до оси вращения. После этого человек сводит руки так, что гири оказываются на расстоянии R_1. Чему будет равна угловая скорость вращения после этого?

По закону сохранения момента импульса:

$$L_0 = I_0\omega_0 + 2m_0{R_0}^2\omega_0$$
$$L_1 = \left(I_0 + 2m_0{R_1}^2\right)\omega_1$$
$$L_0 = L_1 \quad \rightarrow$$

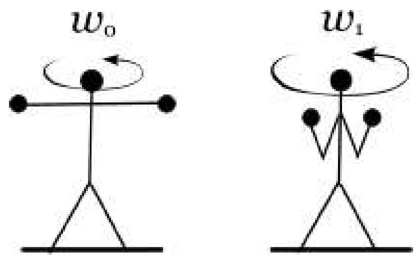


Рис. 4.10

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{I_0 + 2m_0{R_0}^2}{I_0 + 2m_0{R_1}^2}$$

Если пренебречь I_0, тогда

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{2m_0{R_0}^2}{2m_0{R_1}^2} = \omega_0 \frac{{R_0}^2}{{R_1}^2} = \left| \begin{matrix} \text{например}, R_0 = 0{,}8\ \text{м} \\ R_1 = 0{,}2\ \text{м} \end{matrix} \right| = 16\omega_0$$

Задача 5. Студенту на скамье Жуковского дали в руки ось колеса с моментом инерции $I = 0{,}5$ кг·м^2, которое вращается против часовой стрелки (если смотреть сверху) с частотой $n = 3$ об/с. С какой угловой скоростью и в каком направлении будет вращаться студент со скамьей после поворота оси колеса на 180° (Рис. 4.11), если момент инерции его и скамьи равен 5 кг·м^2?

Дано:
$I_1 = 0{,}5$ кг·м^2
$n = 3$ об/с
$I_0 = 5$ кг·м^2

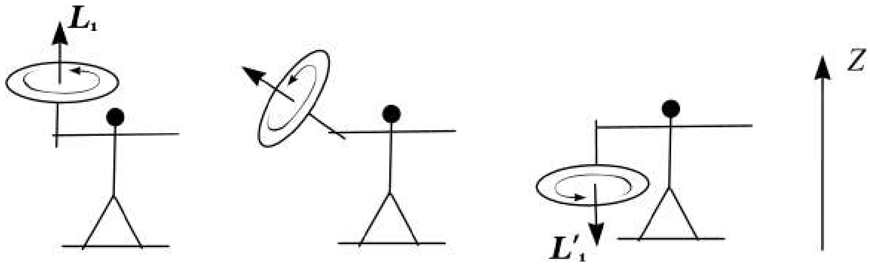


Рис. 4.11

Во время поворота оси колеса выполняется закон сохранения момента импульса.

$$\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L'}_1 + \boldsymbol{L}_2\,,$$

здесь L_2 – момент импульса студента со скамьей.

В проекции на ось Z: $L_{1z} > 0$

$$L_{1z} = -L_{1z} + L_{2z}$$
$$L_{2z} = 2L_{1Z}\,,$$

то есть человек будет вращаться в ту же сторону, что и колесо вначале.

Момент импульса колеса после поворота $L'_{1z} = -L_{1z}$, так как трением в подшипниках мы пренебрегаем, а момент силы со стороны студента на колесо всегда действует нормально вектору момента импульса колеса. Поэтому модуль момента импульса колеса сохраняется (по аналогии с действием центростремительной силы на материальную точку, которая движется по окружности с постоянной скоростью).

$$L_{2z} = I_0\omega = 2I_1 \cdot 2\pi n$$

$$\omega = \frac{4\pi n I_1}{I_0} = \frac{4\pi \cdot 3 \cdot 0{,}5}{5} = 1{,}2\pi = 3{,}77 \text{ рад/с}$$

4.5. Свободные оси

Представим вращение твердого тела вокруг произвольной оси.

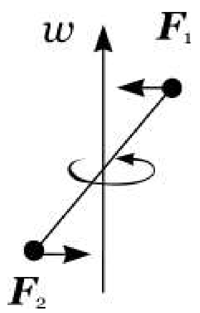


Рис. 4.12

Как видно из Рис. 4.12, для сохранения оси вращения и положения тела относительно оси необходимо приложить силы F_1 и F_2, иначе ось будет поворачиваться.

Ось вращения, положение которой сохраняется без воздействия внешних сил, называется <u>свободной осью</u> тела.

Можно доказать, что у любого твердого тела существуют три взаимно перпендикулярные свободные оси, проходящие через центр масс тела, они называются <u>главными</u> (Рис. 4.13).

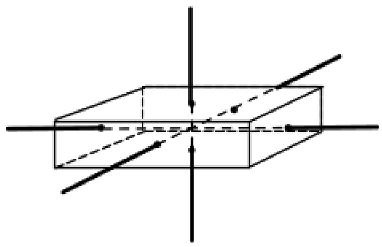
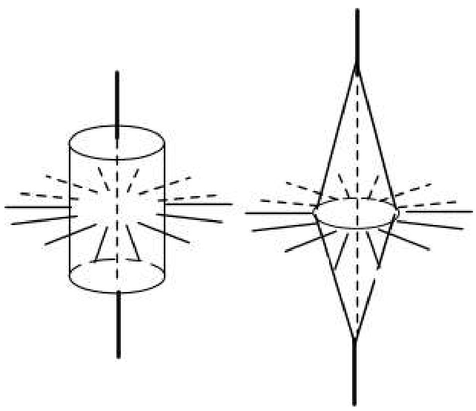


Рис. 4.13

Например, у параллелепипеда эти оси проходят через центры граней.



Если тело имеет вращательную ось симметрии, эта ось является свободной (цилиндр, конус и т.п.), а перпендикулярных свободных осей может быть бесконечное количество, если тело обладает зеркальной плоскостью симметрии, перпендикулярной оси (Рис. 4.14).

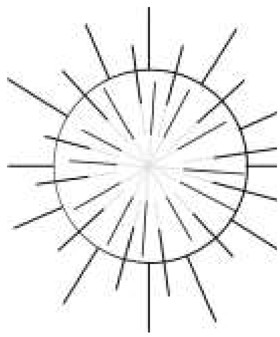


Рис. 4.15

Тело со сферической симметрией (сфера, шар) имеют бесконечное количество свободных осей, ориентированных во всех направлениях и проходящих через центр (Рис. 4.15).

4.6. Гироскопы

Гироскопом называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии.

Гироскоп вращается вокруг своей свободной оси, поэтому без внешних воздействий направление оси сохраняется.

При воздействии внешних сил гироскоп начинает поворачиваться перпендикулярно внешнему воздействию (гироскопический эффект) – см. Рис.

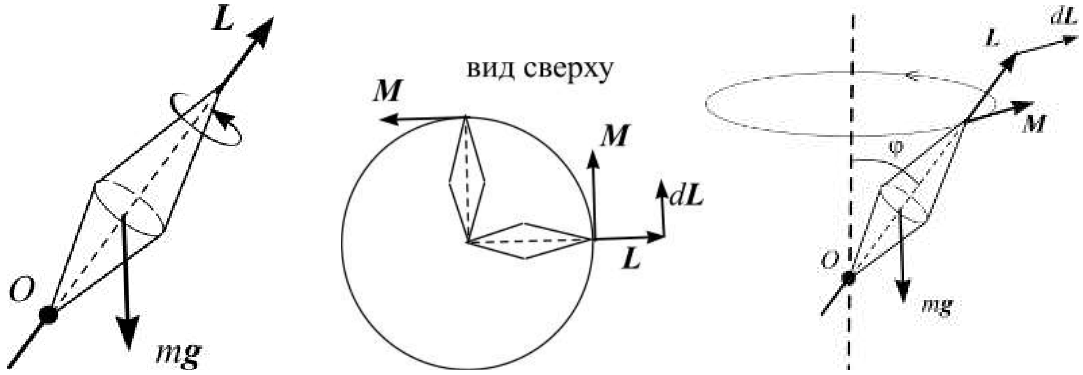


Рис. 4.16

4.16. Это объясняется тем, что вектор момента импульса гироскопа, связанный с фиксированной свободной осью, изменяется в направлении вектора момента силы. Такая связь векторов следует из основного уравнения динамики вращательного движения.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}$$

Если зафиксировать точку O, гироскоп будет двигаться по кругу, прецессировать под действием силы тяжести. При этом момент силы тяжести $\boldsymbol{M}$ будет также поворачиваться, оставаясь нормальным вектору момента импульса $\boldsymbol{L}$ гироскопа.

Гироскопы применяются в технике в качестве гирокомпаса – прибора, показывающего постоянное направление в пространстве. Для этого гироскоп помещают в карданов подвес, который позволяет уменьшить до минимальных значений внешние вращательные моменты. Кроме того, в каждом случае нужно решать задачу сохранения постоянной скорости вращения гироскопа, что достигается соединением осей гироскопа и работающего электродвигателя. В настоящее время существуют десятки различных гироскопов, не использующих вращение, например, пьезокерамические и оптические гироскопы (используются в системах стабилизации видеокамеры, в гироскутерах, в танках, для стабилизации направления ствола пушки, в авиации).

Контрольные вопросы

1. Дайте определение момента силы относительно оси и точки; момента импульса материальной точки.
2. Как связаны момент импульса материальной точки и момент импульса тела?
3. Как связаны момент импульса тела относительно оси и момент инерции тела?
4. Сформулируйте теорему Штейнера.
5. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения, закон сохранения момента импульса. При каких условиях выполняется закон сохранения момента импульса?
6. Что такое свободные оси? Объясните гироскопический эффект.
7. Решите задачу: момент инерции вала относительно оси вращения равен 40 кг·м2. На ось вала радиусом 10 см накинут ремень, к которому приложена сила 200 Н. Какова будет угловая скорость вала через 20 с действия этой силы? На какое расстояние будет вытянут ремень за это время, если он не будет проскальзывать?
8. Решите задачу: найти момент инерции цилиндра радиусом 10 см, массой 2 кг, относительно оси, параллельной оси симметрии, которая проходит на расстоянии 8 см от центра цилиндра.

ТЕМА 5. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

В качестве единой количественной меры различных форм движения материи и соответствующих им взаимодействий, используется скалярная величина, называемая энергией. Энергия характеризует способность тела совершить работу.

Для различных форм движения материи вводят соответствующие им виды, формы энергии: механическую, внутреннюю, электромагнитную и так далее. Для всех форм выполняется закон сохранения энергии:

Энергия замкнутой системы тел сохраняется.

Изменение механической энергии тела, изменение механического движения этого тела происходит в процессе механического действия на это тело со стороны других тел. Мерой такого действия являются силы, поэтому мы будем говорить об изменении энергии тела под воздействием внешних сил. Для количественного описания этого процесса в механике вводится понятие работы.

5.1. Работа силы, момента силы. Мощность

Элементарной работой силы δA силы $\boldsymbol{F}$ на малом перемещении $d\boldsymbol{r}$ точки приложения сил называется скалярное произведение

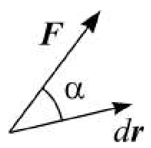


Рис. 5.1

$$\delta A = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} dt ,$$

где $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ – скорость материальной точки, dt– время осуществления работы, или

$$\delta A = Fdr\, cos\alpha = Fvdt\, cos\alpha = \ FdS\, cos\alpha,$$

где dr – перемещение, dS – элементарный путь, α – угол между перемещением и вектором силы (Рис. 5.1).

Сила не совершает работы в двух случаях: а) точка приложения неподвижна $\boldsymbol{v} = 0$; б) точка приложения движется перпендикулярно направлению силы (Рис. 5.1):

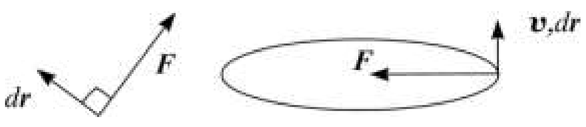


Рис. 5.2

В последнем случае возможно движение с постоянной скоростью по окружности (груз на нити).

Если разложить векторы силы и перемещения по ортонормированному базису, можно получить уравнение для работы

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Работой силы при перемещении точки приложения из положения 1 в положение 2 является интеграл

$$A_{1-2} = \int_1^2 \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \int_1^2 F \cos \alpha \ dr$$

Если сила постоянна по модулю и направлению, тогда

$$A_{1-2} = Fl \cos \alpha,$$

где l – расстояние между точками 1 и 2.

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг оси Z.

Пусть к точке A на расстоянии ρ от оси приложена сила $\boldsymbol{F}$, тангенциальная составляющая которой равна F_τ (Рис. 5.3). Под действием силы точка приложения силы сдвинулась на величину dr, тело повернулось на угол $d\varphi$,

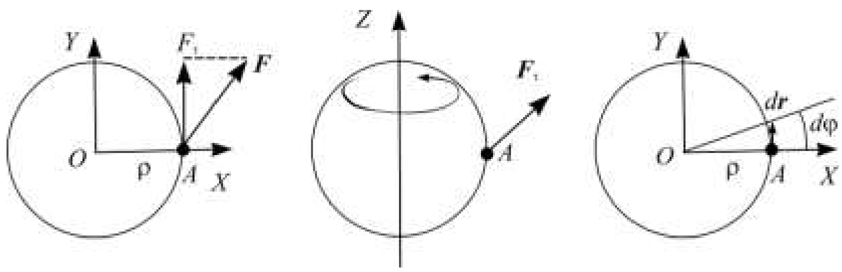


Рис. 5.3

тогда работа силы будет равна

$$\delta A = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_\tau dr = F_\tau \rho d\varphi = M_z d\varphi$$

Работа момента сил:

$$\delta A = M_z d\varphi$$

$$\delta A = M_z d\varphi = M_z \omega dt$$

Причем, если направление $d\varphi, \omega$ совпадает с направлением M_z(по правилу правого винта), $\delta A > 0$, иначе $\delta A < 0$.

Работой момента сил при повороте вокруг оси Z является интеграл

$$A_{1-2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$$

Пусть $M_z = const$. Работа момента сил M_zпри повороте тела на угол φ будет равна

$$A = M_z \varphi$$

На основе предыдущих формул мы можем дать понятие мощности:

Мощность – это работа, совершенная в единицу времени.

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \frac{dt}{dt} \rightarrow$$

$$N = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = Fv \cos \alpha$$

или

$$N = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega_z$$

При вращении абсолютно твердого тела вокруг оси *Z*:

$$N = M_z \omega_z$$

5.2. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетическая энергия механической системы является мерой механического движения этой системы.

Теорема об изменении кинетической энергии.

Изменение кинетической энергии материальной точки происходит под действием приложенных к ней сил и равно работе, совершаемой этими силами.

$$dW_{\text{кин}} = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \boldsymbol{v} dt = \left| \begin{matrix} \text{по 2 закону Ньютона} \\ \boldsymbol{F} dt = d\boldsymbol{p} \end{matrix} \right| \rightarrow$$

$$dW_{\text{кин}} = \boldsymbol{v} d\boldsymbol{p} = \frac{1}{m} \boldsymbol{p} d\boldsymbol{p} = \left| \boldsymbol{p} d\boldsymbol{p} = \frac{1}{2} d(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} dp^2 = p dp \right|$$

$$dW_{\text{кин}} = \frac{1}{2m} dp^2$$

Полагая $W_{\text{кин}} = 0$ при $p = 0$, получим после интегрирования

$$W_{\text{кин}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетических энергий всех частей этой системы:

$$W_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i {v_i}^2}{2}$$

Заметим, что кинетическая энергия не зависит от направления движения системы, в отличие от импульса. Для системы материальных точек также справедлива теорема об изменении кинетической энергии.

5.3. Потенциальная энергия. Связь силы и потенциальной энергии

Замечание: здесь и далее для описания элементарной работы мы используем формулу δA вместо dA. Почему? В математике полный дифференциал d используется для описания изменения функции, которая зависит только от переменных x, y, z. Работа же не является такой функцией. Работа определяется действием внешних сил, которые как могут быть функциями координат (сила тяжести, упругости, Кулоновского взаимодействия), так и не быть ими (сила трения, сопротивления – эти силы зависят от скорости).

Зависящие от координат силы называются **потенциальными** или **консервативными**.

Сила *F*, действующая на материальную точку называется потенциальной, если работа этой силы зависит только от начального и конечного положения точки, но не зависит от траектории.

Рассмотрим работу потенциальной силы на замкнутом участке траектории (Рис. 5.4):

$$A_{1A2} = A_{1B2} = -A_{2B1}$$

$$A_{1A2B1} = A_{1A2} + A_{2B1} = 0 \quad \rightarrow$$

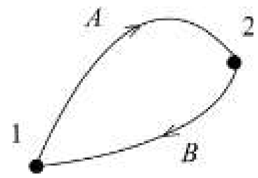


Рис. 5.4

Работа потенциальной силы на произвольной замкнутой траектории точки ее приложения равна нулю.

Работа $A_{1\text{-}2}$, совершаемая **потенциальными** силами при изменении **конфигурации** системы, то есть расположения ее частей (материальных точек) относительно системы отсчета, не зависит от того, как конкретно осуществляется процесс перехода из начальной конфигурации (1) в конечную (2).

Работа определяется только 1 и 2 конфигурациями.

Следовательно, работу можно представить в виде разности значений некоторой функции конфигурации системы $W_п$, называемой **потенциальной энергией**

$$A_{1-2} = -(W_{п2} - W_{п1})$$

при малом изменении:

$$\delta A = -dW_п$$

Потенциальная энергия характеризует способность механической системы совершить работу при изменении взаимного расположения ее частей.

Таким образом:

Потенциальной энергией механической системы называется величина, равная работе, которую совершают все действующие на систему (внутренние и внешние) потенциальные силы для перевода системы из рассматриваемого состояния в состояние, соответствующее ее нулевой конфигурации.

Разница между потенциальными энергиями двух конфигураций определена точно, в то же время потенциальная энергия определена с точностью до константы.

Пример выбора нулевой конфигурации: потенциальная энергия силы тяжести (см. Рис. 5.5).

Мы выбираем нулевой уровень (поверхность Земли), тогда потенциальная энергия камня массой m на высоте h над уровнем Земли будет величина:

$$W_п = mgh = A_{h\to 0}$$

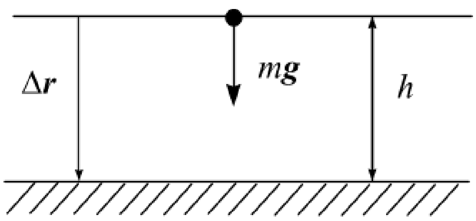


Рис. 5.5

Элементарная работа в проекциях на оси координат:

$$\delta A = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = -dW_п = -\left(\frac{\partial W_п}{\partial x}dx + \frac{\partial W_п}{\partial y}dy + \frac{\partial W_п}{\partial z}dz\right) = F_x dx + F_y dy + F_z dz \Rightarrow$$

$$F_x = -\frac{\partial W_п}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial W_п}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial W_п}{\partial z},$$

или

$$\boldsymbol{F} = -\left[\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z}\boldsymbol{k}\right]$$

Операция над потенциальной энергией в квадратных скобках называется градиентом.

$$\boldsymbol{F} = -\text{grad}(W_{\text{п}})$$

Также часто эту формулу записывают в виде

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} W_{\text{п}},$$

где $\boldsymbol{\nabla}$ – оператор Гамильтона.

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Мы получили дифференциальную связь силы и потенциальной энергии. Если расписать работу в определении потенциальной энергии, получим интегральную связь потенциальной силы и потенциальной энергии.

$$W_{\text{п}2} - W_{\text{п}1} = -A_{1-2} = -\int_1^2 \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}$$

5.4. Потенциальная энергия сил упругости и тяготения

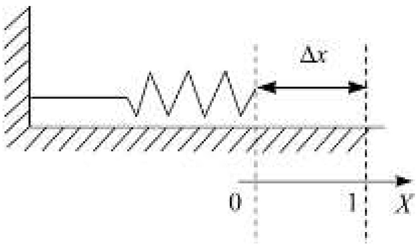


Рис. 5.6

Потенциальная энергия силы упругости (Рис. 5.6)

$$F_{\text{упр}\,x} = -k\Delta x$$

Пусть $W_{\text{п}} = 0$ в положении равновесия

$$W_1 - W_0 = -A_{01} = -\int_0^{\Delta x} F_x dx =$$

$$= -\int_0^{\Delta x} (-kx) dx = k\int_0^{\Delta x} x dx = \frac{k(\Delta x)^2}{2}$$

$$W_{\text{п упр}} = \frac{kx^2}{2}$$

Планеты и Солнце можно рассматривать как материальные точки, координаты которых совпадают с расположением их центров масс.

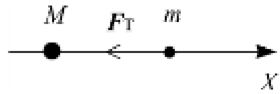


Рис. 5.7

Найдем потенциальную энергию тела массой m в поле тяготения тела массой M (Рис. 5.7, 5.8).

Разность потенциальных энергий:

$$W_2 - W_1 = -A_{12} = -\int_1^2 \boldsymbol{F}_{\text{т}} d\boldsymbol{r} = \int_2^1 \boldsymbol{F}_{\text{т}} d\boldsymbol{r}$$

Пусть $W_1 = 0,\ r_1 \to \infty$ потенциальная энергия тела массой m равна нулю на бесконечности, тогда

$$W_2 = \int_r^\infty \boldsymbol{F}_{\text{т}} d\boldsymbol{r} = \left|\begin{matrix}\text{спроецируем} \\ \text{на ось } OX\end{matrix}\right| =$$

$$= -\int_r^\infty \frac{GMm}{x^2} dx = -GMm\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_r^\infty = GMm\frac{1}{x}\Big|_r^\infty$$

$$= -GMm\frac{1}{r}$$

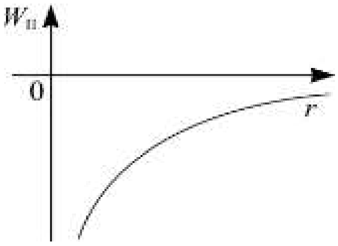


Рис. 5.8

$$W_{\text{п}} = -\frac{GMm}{r},$$

здесь G – гравитационная постоянная.

Потенциальная энергия тяготения – отрицательная величина.

5.5. Движение материальной точки в потенциальном поле сил. Равновесие

При анализе движения в поле потенциальных сил необходимо использовать понятие полной энергии.

Полной энергией механической системы называется сумма кинетической и потенциальной энергии

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}}$$

Связь потенциальной энергии материальной точки и потенциальных сил, действующих на нее, позволяет сформулировать правила равновесия материальной точки.

Определение равновесия:

Механическим равновесием называется такое состояние системы, из которого она может быть выведена только в результате внешнего воздействия.

Устойчивое равновесие:

Равновесие называется устойчивым, если при малом внешнем воздействии в системе возникают силы, стремящиеся возвратить систему в положение равновесия.

Неустойчивое равновесие:

Состояние равновесия называется неустойчивым, если при малом воздействии система выходит из равновесия и больше не возвращается в него.

Пусть у нас есть материальная точка, движущаяся в потенциальном поле сил вдоль оси X (Рис. 5.9). Так как потенциальная энергия точки зависит от координат, можно построить ее график (представьте, что кривая на графике – высота земли над уровнем моря).

Рассмотрим движение такой частицы, причем ее полная энергия задана $W = W_к + W_п$, и потенциальная энергия $W_п = W - W_к \le W$ – всегда меньше полной (см рисунок).

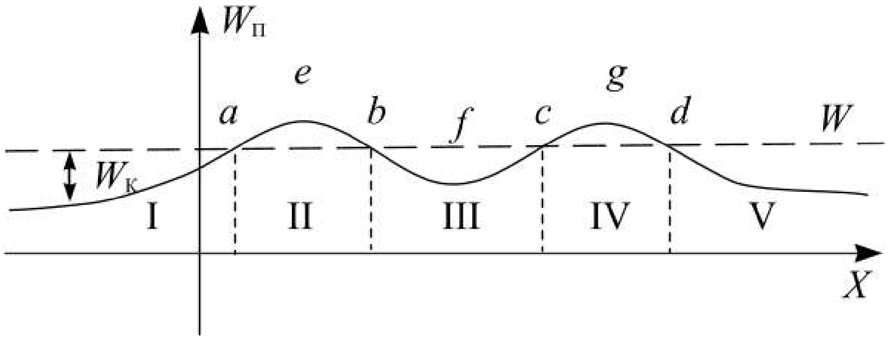


Рис. 5.9

Видно, что точка может двигаться только в областях I, III, V, причем движения в I и V областях приводят к уходу в бесконечность. Говорят, что происходит «отражение в точках a и d от потенциального барьера»

В III области точка будет находиться в «потенциальной яме» и будет совершать циклическое движение между точками b и c.

Предположим, что полная энергия системы произвольна. Рассмотрим точки e, f, g: в них первая производная потенциальной энергии по координате равна нулю:

$$\frac{\partial\, W_п}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow F_x = 0$$

В этих положениях материальная точка будет находиться в равновесии, если ее скорость равна нулю (то есть потенциальная энергия равна полной). Причем в точках e и g равновесие будет неустойчивым, а в точке f – устойчивым.

Мы видим, что признаки устойчивого равновесия:

$$\frac{\partial^2\, W_п}{\partial x^2} > 0 \text{ – выпуклость вниз,}$$

$$\frac{\partial^2\, W_п}{\partial x^2} < 0 \text{ – неустойчивое равновесие – выпуклость вверх.}$$

Итак, условиями устойчивого равновесия являются следующие характеристики потенциальной энергии:

$$\frac{\partial\, W_п}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2\, W_п}{\partial x^2} > 0$$

Признаки неустойчивого равновесия:

$$\frac{\partial\, W_п}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2\, W_п}{\partial x^2} < 0$$

В случае движения в трех измерениях аналогичные соотношения работают для координат y и z.

5.6. Законы изменения и сохранения энергии

Пусть у нас есть система материальных точек, находящихся в поле действия внешних сил, тогда суммарная элементарная работа всех сил δA приводит к изменению кинетической энергии $dW_{кин}$.

$$\delta A = dW_{кин} = \delta A_{НПС} + \delta A_{ПС}\,, \tag{1}$$

здесь $A_{НПС}$ – работа непотенциальных сил, $A_{ПС}$ – работа потенциальных сил. В то же время работа потенциальных сил описывается уравнением:

$$\delta A_{ПС} = -dW_п \tag{2}$$

Мы предполагаем, что внешние потенциальные силы не изменяются со временем.

Подставим (2) в (1)

$$dW_{кин} = -dW_п + \delta A_{НПС}$$

Вспомним, что полная энергия системы

$$W = W_{\text{кин}} + W_{\text{п}} \quad \Longrightarrow$$

$$dW = \delta A_{\text{НПС}} \qquad (3)$$

Данное уравнение выражает закон изменения механической энергии

Изменение механической энергии системы равно алгебраической сумме работ всех непотенциальных сил, действующих на систему.

Введем понятие консервативной системы.

Консервативной называется система, в которой все внешние и внутренние непотенциальные силы не совершают работы.

Естественно, для таких систем уравнение (3) приходит к виду

$$dW = dW_{\text{кин}} + dW_{\text{п}} = 0$$

Интегрируя уравнение, получим

$$W = W_{\text{кин}} + W_{\text{п}} = const$$

Данное уравнение отражает закон сохранения механической энергии:

Механическая энергия консервативной системы материальных точек не изменяется со временем.

Рассмотрим некоторые приложения законов сохранения энергии и импульса.

5.7. Расчет космических скоростей

Для вычислений потребуются некоторые константы:

гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/кг · с,
масса Солнца $M_{\text{С}} = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг,
масса Земли $M_{\text{З}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг,
радиус земной траектории $R_{\text{з.т.}} = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ м,
радиус Земли $R_{\text{З}} = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ м

Первая космическая скорость: минимальная скорость спутника Земли.

Предположим, что спутник летит недалеко от поверхности Земли. Тогда по второму закону Ньютона:

$$F_{\text{т}} = G\frac{M_3 m}{{R_3}^2} = ma = m\frac{v^2}{R_3}$$

$$G\frac{M_3}{R_3} = v^2$$

$$v_I = \sqrt{G\frac{M_3}{R_3}} = 7{,}9 \cdot 10^3 \ \text{м/с}$$

<u>Вторая космическая скорость</u>: минимальная скорость, необходимая для ухода спутника из поля тяготения Земли.

Пусть спутник ушел в бесконечность, минимальной энергии будет соответствовать нулевая кинетическая и потенциальная энергии $W_{\text{кин}} = 0, \quad W_{\text{п}} = 0$, поэтому

$$W_{\text{кин}} + W_{\text{п}} = 0$$

На поверхности Земли:

$$W_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$$

$$W_{\text{п}} = -G\frac{M_3 m}{R_3}, \qquad \text{тогда}$$

$$\frac{\cancel{m}v^2}{2} - G\frac{M_3\cancel{m}}{R_3} = 0$$

$$v_{II} = \sqrt{2G\frac{M_3}{R_3}} = v_I\sqrt{2} = 11{,}2 \cdot 10^3 \ \text{м/с}$$

<u>Третья космическая скорость</u>: минимальная скорость на поверхности Земли, необходимая для ухода тела из Солнечной системы.

Аналогично предыдущим рассуждениям, при уходе на бесконечность:

$$W_{\text{кин}} + W_{\text{п}} = 0$$

$$\frac{\cancel{m}{v_0}^2}{2} - G\frac{M_{\text{С}}\cancel{m}}{R_{\text{з.т.}}} = 0$$

$$v_0 = \sqrt{2G\frac{M_{\text{С}}}{R_{\text{з.т.}}}}$$

Получили скорость спутника на орбите Земли.

Найдем скорость Земли относительно Солнца по второму закону Ньютона:

$$\cancel{M}_З \frac{v^2}{R_{з.т.}} = G\frac{\cancel{M}_З M_С}{{R_{з.т.}}^2}$$

$$v_З = \sqrt{G\frac{M_С}{R_{з.т.}}}$$

Найдем скорость ${v_{III}}^0$ спутника относительно Земли. Сумма скоростей Земли и спутника относительно Земли дает скорость спутника на земной траектории относительно Солнца (Рис. 5.10).

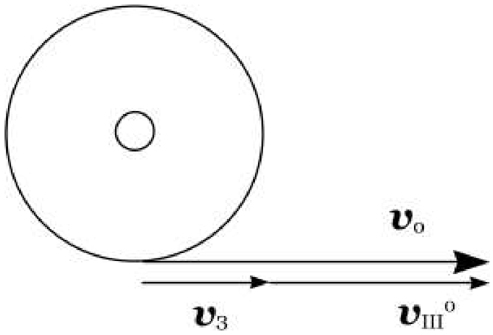


Рис. 5.10

$${v_{III}}^0 = v_0 - v_З = \sqrt{2G\frac{M_С}{R_{з.т.}}} - \sqrt{G\frac{M_С}{R_{з.т.}}} =$$

$$= \sqrt{G\frac{M_С}{R_{з.т.}}}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Спутник взлетает с Земли, поэтому преодоление силы тяжести Земли необходимо учесть в уравнении закона сохранения энергии:

$$W_{кин} + W_п' = \frac{m({v_{III}}^0)^2}{2},$$

где $W_п'$ – потенциальная энергия тела в поле тяготения Земли

$$\frac{\cancel{m}{v_{III}}^2}{2} - G\frac{M_З\cancel{m}}{R_З} = \frac{\cancel{m}({v_{III}}^0)^2}{2}$$

$${v_{III}}^2 = 2G\frac{M_З}{R_З} + ({v_{III}}^0)^2$$

Заметим, что

$$({v_{III}}^0)^2 = G\frac{M_С}{R_{з.т.}}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = G\frac{M_С}{R_{з.т.}}\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

Поэтому

$$v_{III} = \sqrt{2G\frac{M_З}{R_З} + G\frac{M_С}{R_{з.т.}}\left(3-2\sqrt{2}\right)} = 16{,}7\cdot 10^3\ \text{м/с}$$

Для ухода спутника из Солнечной системы необходимо, чтобы на Земле его скорость была не менее III космической скорости.

$$v_{III} = 16{,}7 \cdot 10^3 \ \text{м/с}$$

5.8. Удар шаров

Рассмотрим еще одно приложение законов сохранения: удар шаров – упругий и не упругий.

Будем рассматривать лобовое столкновение

1. Неупругий удар (Рис. 5.11).

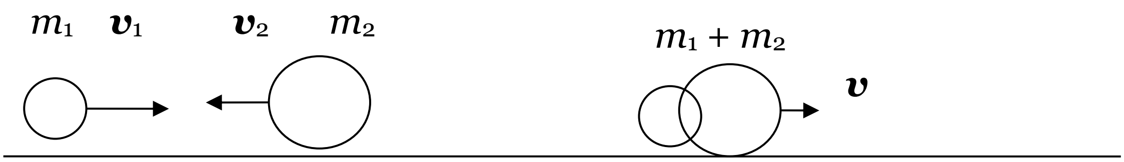


Рис. 5.11

Пусть они движутся горизонтально, вдоль одной прямой. Сумма сил, действующих на шары равна 0, трения нет.

К ним можно применить закон сохранения импульса

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_{12}$$

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}$$

скорость равна:

$$\boldsymbol{v} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}$$

в проекции на ось *OX*:

$$v = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

Так как удар неупругий, часть механической энергии теряется за счет работы непотенциальных сил и переходит в тепло.

Подсчитаем эту потерю (тепло):

$$Q = W_1 - W_2 = \frac{m_1 {v_1}^2}{2} + \frac{m_2 {v_2}^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_1 {v_1}^2 + m_2 {v_2}^2 - \cancel{(m_1 + m_2)} \frac{(m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x})^2}{(m_1 + m_2)^{\cancel{2}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2(m_1+m_2)}\Big(m_1 m_1 {v_1}^2 + m_1 m_2 {v_1}^2 + m_1 m_2 {v_2}^2 + m_2 m_2 {v_2}^2$$
$$- \left(m_1 m_1 {v_1}^2 + m_2 m_2 {v_2}^2 + 2 m_1 m_2 v_1 v_2\right)\Big) =$$
$$= \frac{1}{2(m_1+m_2)}\left(m_1 m_2 {v_1}^2 + m_1 m_2 {v_2}^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2\right)$$
$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1 - v_2)^2 = Q$$

Если скорости одинаковы, то тепло = 0, так как удара не происходит.

2. Упругий удар (Рис. 5.12)

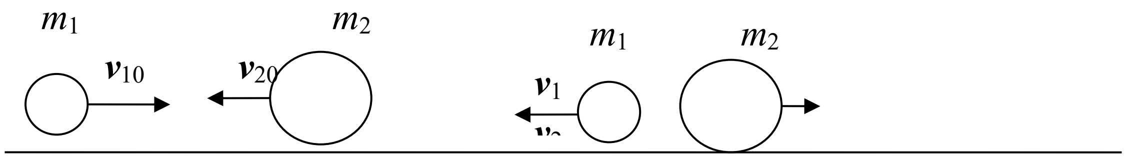


Рис. 5.12

Для такого удара легко записать закон сохранения:

$$m_1 \boldsymbol{v}_{10} + m_2 \boldsymbol{v}_{20} = m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2$$

В проекции на ось *OX*:

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad (1)$$

Во время удара сохраняется механическая энергия:

$$W_{\text{п}} = 0;\ W_{\text{кин}} = const$$

$$\frac{m_1 {v_{10}}^2}{2} + \frac{m_2 {v_{20}}^2}{2} = \frac{m_1 {v_1}^2}{2} + \frac{m_2 {v_2}^2}{2} \qquad (2)$$

Известны начальные скорости и массы тел, надо найти конечные скорости $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. При решении «в лоб» получим квадратное уравнение. Существует другой способ, основанный на соотношении

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

перепишем (1):

$$m_1(v_{10} - v_1) = m_2(v_2 - v_{20}) \qquad (3)$$

второе уравнение:

$$m_1({v_{10}}^2 - {v_1}^2) = m_2({v_2}^2 - {v_{20}}^2) \quad \text{или}$$

$$m_1(v_{10} - v_1)(v_{10} + v_1) = m_2(v_2 - v_{20})(v_2 + v_{20}) \qquad (4)$$

подставим (3) в (4) =>

$$\cancel{m_2(v_2 - v_{20})}(v_{10} + v_1) = \cancel{m_2(v_2 - v_{20})}(v_2 + v_{20})$$

$$v_{10} + v_1 = v_2 + v_{20} \qquad (5)$$

Нам нужно получить v_1 и v_2, напомним, что это – проекции на ось X, то есть они могут иметь как положительный, так и отрицательный знак.

Из (5):

$$v_1 = v_2 + v_{20} - v_{10}\,, \quad \text{подставим в (3):}$$

$$m_1(v_{10} - v_2 - v_{20} + v_{10}) = m_2(v_2 - v_{20})$$

$$m_1(2v_{10} - v_{20}) = (m_1 + m_2)v_2 - m_2 v_{20}$$

$$(m_1 + m_2)v_2 = m_1(2v_{10} - v_{20}) + m_2 v_{20} \qquad \Longrightarrow$$

$$v_2 = \frac{2m_1 v_{10} + (m_2 - m_1)v_{20}}{m_1 + m_2}$$

Так как в условиях не были заданы ни направления движения шаров, ни отношение масс шаров, скорость первого шара определяем, заменив индексы – 1 на 2 и наоборот:

$$v_1 = \frac{2m_2 v_{20} + (m_1 - m_2)v_{10}}{m_1 + m_2}$$

Исследуем полученное решение: пусть $m_1 = m_2$

$$\begin{cases} v_1 = v_{20} \\ v_2 = v_{10} \end{cases}$$

– шары «поменялись» местами

Пусть шар отскакивает от стенки, то есть $m_2 \to \infty$, тогда множитель $m_1/m_2 \to 0$.

$$\begin{cases} v_1 = 2v_{20} - v_{10} \\ v_2 = v_{20} \end{cases}$$

Стенка – не изменила скорости, шар отскочил от стенки с той же относительной скоростью, с которой он двигался к стене.

5.9. Кинетическая энергия вращательного движения абсолютно твердого тела

Вспомним основное уравнения динамики вращательного движения:

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}; \quad M_z = I\varepsilon_z$$

Проекция на ось Z обозначает вращение вокруг оси. Далее мы будем рассматривать только вращение вокруг фиксированной оси.

Элементарная работа:

$$\delta A = Md\varphi \tag{4}$$

Заметим, что при вращении вокруг оси

$$d\varphi = \omega dt; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

Подставим в (4):

$$\delta A = Md\varphi = I\varepsilon d\varphi = I\varepsilon\omega dt = I\frac{d\omega}{dt}\omega dt$$

Видно, что время можно сократить

$$\delta A = I\omega d\omega = \frac{1}{2}Id\omega^2$$

Проинтегрируем ω^2от 0 до $\omega^2 \quad \Longrightarrow$

$$A = \int_0^{\omega^2} \frac{1}{2}I\, d\omega^2 = \frac{I\omega^2}{2}$$

По закону об изменении кинетической энергии работа всех сил равна изменению кинетической энергии, поэтому

$$W_{\text{кин}}{}^{\text{вр}} = \frac{I\omega^2}{2}$$

Мы получили выражения для кинетической энергии тела при вращении.

Как уже отмечалось ранее, очень важный случай плоского движения – движения, которое можно изобразить на бумаге (в двух измерениях).

При плоском движении абсолютно твердого тела, как законы динамики, так и выражения для кинетической энергии записываются отдельно для поступательного движения центра масс и вращательного движения вокруг центра масс.

Уравнения динамики:

$$ma = \sum \boldsymbol{F}$$

$$I\varepsilon = \sum M$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{m{v_1}^2}{2} + \frac{I{\omega_1}^2}{2} + W_{\text{п }1} = \frac{m{v_2}^2}{2} + \frac{I{\omega_2}^2}{2} + W_{\text{п }2}$$

Пример применения законов сохранения при вращательном и поступательном движении: <u>маятник Максвелла</u> (см. Рис. 5.13). В этом случае наблюдается плоское движение.

Пусть у нас есть маятник Максвелла, который опускается с высоты h.

Найти его скорость.

Дано:
ось: m;r
диск: M; R
h
v –?

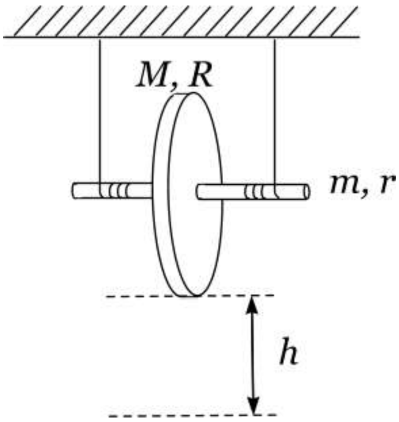


Рис. 5.13

$$I = \frac{1}{2}(mr^2 + MR^2);$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$(m+M)gh = \frac{(m+M)v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \left|\omega = \frac{v}{r}\right|$$

$$\Rightarrow$$

$$(m+M)gh = \frac{v^2}{2}\left\{(m+M) + \frac{I}{r^2}\right\} =$$

$$= \frac{v^2}{2}\left\{(m+M) + \frac{1}{2}\left(m + M\frac{R^2}{r^2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{v^2}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}m + M(1 + \frac{R^2}{2r^2})\right)\right\}$$

$$2(m+M)gh = v^2\left(\frac{3}{2}m + M(1 + \frac{R^2}{2r^2})\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2(m+M)gh}{\left(\frac{3}{2}m + M(1 + \frac{R^2}{2r^2})\right)}}$$

Контрольные вопросы

1. Дайте понятие энергии в физике. Как определяется работа силы, момента силы, мощность?
2. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии. Как на ее основе выводится формула кинетической энергии?
3. Что такое потенциальная сила? Дайте определение потенциальной энергии.
4. Как записываются уравнения в интегральной и дифференциальной форме, описывающие связь потенциальной силы и потенциальной энергии? Запишите формулы потенциальной энергии сил упругости и тяготения.
5. Дайте определение механического равновесия, устойчивого равновесия, неустойчивого равновесия.
6. Запишите закон изменения полной механической энергии. На основе этого закона сформулируйте закон сохранения полной механической энергии.
7. Как записывается кинетическая энергия вращающегося тела? Каков вид закона сохранения полной механической энергии при плоском движении, с учетом вращения?
8. Решите задачу: пуля, массой 9 г, летела со скоростью 200 м/с, попала в яблоко массой 50 г и вылетела из яблока со скоростью 180 м/с. Какова скорость яблока после удара пули? Какое количество тепла выделится при ударе?
9. Какое количество энергии должно выделиться, если остановить вращение Земли? Масса Земли – $5{,}97 \cdot 10^{24}$ кг, радиус Земли – 6371 км. Считать Землю шаром (момент инерции шара $I = \frac{2}{5}mR^2$). Один оборот вокруг своей оси Земля делает за 23 часа 56 минут.

ТЕМА 6. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

6.1. Силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета.

Ранее мы рассматривали только инерциальные системы отсчета (СО), в этих системах выполняются законы Ньютона: первый – является, по сути, определением инерциальных СО. Рассмотрим кинематику и динамику в неинерциальных системах.

Следствием первого закона Ньютона является то, что все инерциальные системы отсчета движутся с постоянной скоростью, без вращения относительно выбранной СО.

Таким образом, неинерциальная система отсчета движется с поступательным ускорением и (или) вращается относительно инерциальной системы.

Рассмотрим СО, ***движущуюся поступательно*** с ускорением относительно инерциальной системы отсчета: (см. Рис. 6.1)

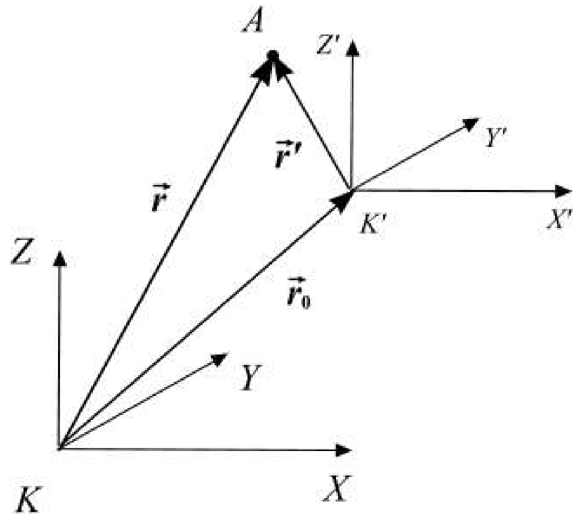


Рис. 6.1

система K – инерциальная, K' – не инерциальная.

Связь координат точки A в этих системах

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}',$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор точки,

$\boldsymbol{r}_0$ – координата неинерциальной системы,

$\boldsymbol{r}'$ – координата точки в неинерциальной СО.

Получим первую производную по времени:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}'$$

Уже известное нам правило сложения скоростей

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}'$$

Если мы еще раз продифференцируем уравнение по времени, получим

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}'$$

Рассмотрим динамику – силы в неинерциальной системе отсчета.

Пусть на материальную точку действует суммарная сила $\boldsymbol{F}$, тогда в инерциальной системе отсчета мы можем записать:

$$\boldsymbol{F} = m(\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}')$$

Рассмотрим движение точки в неинерциальной СО:

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0$$

Это равенство похоже на 2 закон Ньютона, но появилась добавка $\boldsymbol{F}_{\text{ин}} = -m\boldsymbol{a}_0$, которую называют силой инерции поступательного движения.

Сила инерции, возникающая при ускоренном поступательном движении системы отсчета, равна произведению массы тела на ускорение системы, взятое со знаком минус.

Мы пришли к формуле:

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{ин}}$$

Итак, если мы учли ускорение системы, добавив еще одну силу – силу инерции, то можно считать, что в неинерциальной системе также выполняется II закон Ньютона, что позволяет решать многие задачи.

Внимание: 1) III закон Ньютона не применим к силам инерции! Потому, что обычная сила – это мера взаимодействия тел, а силы инерции обусловлены свойствами самих неинерциальных систем отсчета.

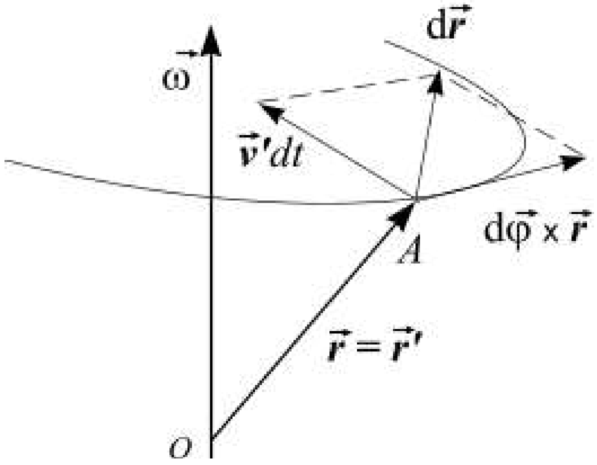
2) Силы инерции действуют только в неинерциальных системах отсчета.

6.2. Силы инерции в равномерно вращающейся системе отсчета

Для изучения сил инерции во вращающейся системе отсчета (ВСО) мы вначале получим кинематику – выразим ускорение в инерциальной СО (ИСО), а затем получим уравнение динамики – аналог второго закона Ньютона.

Рассмотрим преобразование скоростей и ускорений во вращающейся системе отсчета.

Пусть K' система отсчета вращается с угловой скоростью w вокруг оси, неподвижной в K – системе отсчета. Возьмем начало координат K и K' систем отсчета в одной точке O на оси вращения. Тогда радиус – вектор в обеих систем будет один и тот же $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$.



Если точка A неподвижна во вращающейся СО, то за малый промежуток времени в системе K эта точка сместится на величину

$$d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}dt$$

Если точка движется относительно вращающейся K' системы отсчета со скоростью $\boldsymbol{v}'$, тогда она также переместится на расстояние $d\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{v}'dt$ (Рис. 6.2).

Тогда

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}'dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}dt$$

Поделим это выражение на dt, получим

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

Это правило перехода от скорости v' во ВСО к скорости данной точки в неподвижной системе отсчета.

Приращение $d\boldsymbol{v}$ вектора $\boldsymbol{v}$ в K-системе равно

$$d\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times d\boldsymbol{r}$$

Подставим в эту формулу $d\boldsymbol{r}$

$$d\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}dt =$$
$$= \boldsymbol{a}'dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}dt =$$
$$= \boldsymbol{a}'dt + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}dt$$

Далее надо оценить $d\boldsymbol{v}'$, для этого рассмотрим преобразование вектора $\boldsymbol{v}'$при переходе от K' к K системе отсчета (Рис. 6.3).

Найдем $d\boldsymbol{v}'$: пусть точка имеет постоянную скорость $\boldsymbol{v}' = const$ в K' системе, тогда приращение этого вектора в K системе отсчета обусловлено только его поворотом на некоторый угол в вместе с K' системой отсчета и равно, как и в случае с $\boldsymbol{r}$, векторному произведению

$$d\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}dt$$

Если же точка имеет в системе K' ускорение $\boldsymbol{a}'$, то за время dt скорость получит дополнительное приращение $\boldsymbol{a}'dt$ и тогда

$$d\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{a}'dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'dt$$

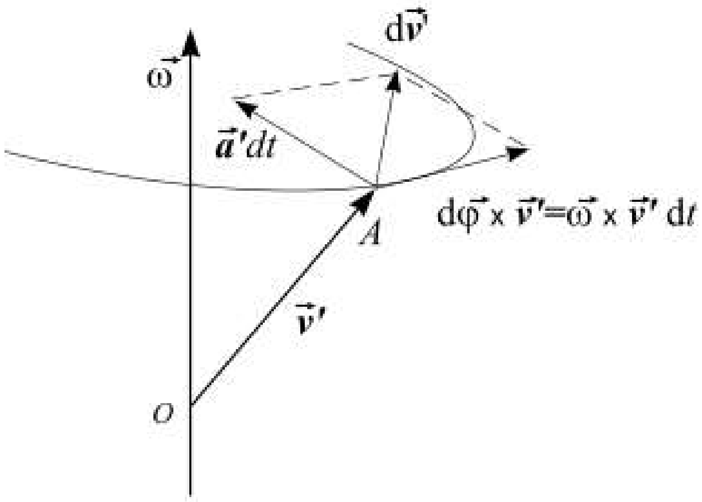


Рис. 6.3

Подставим эту формулу в выражение для $d\boldsymbol{v}$:

$$d\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}dt =$$

$$= \boldsymbol{a}'dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}dt =$$

$$= \boldsymbol{a}'dt + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}dt$$

Поделим на dt:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

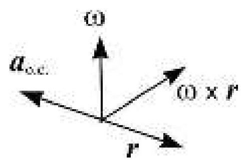


Рис. 6.4

Слагаемое $\boldsymbol{a}_{\text{ос}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ будем называть осестремительным ускорением и представим в виде $\boldsymbol{a}_{\text{ос}} = -\omega^2\boldsymbol{\rho}$, здесь $\boldsymbol{\rho}$ – вектор, перпендикулярный оси и направленный от оси в данную точку.

Покажем, откуда взялась эта формула (Рис. 6.4):

$$\rho = r \sin\alpha$$

$$|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}| = \omega r \sin\alpha = \omega\rho \implies$$

$$|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}| = \omega^2\rho$$

Получили

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - \omega^2\boldsymbol{\rho}$$

Мы выразили ускорение $\boldsymbol{a}$ в инерциальной системе отсчета через ускорение $\boldsymbol{a}'$во вращающейся системе отсчета, угловую скорость вращения ω, скорость точки во вращающейся системе отсчета $\boldsymbol{v}'$ и расстояние ρ от оси вращения до материальной точки.

По аналогии с предыдущей частью запишем II закон Ньютона для материальной точки:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F},$$

здесь $\boldsymbol{F}$ – векторная сумма всех внешних сил, действующих на точку

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m(\boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - \omega^2\boldsymbol{\rho})$$

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m(2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - \omega^2\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{F} + 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega} + m\omega^2\boldsymbol{\rho}$$

Мы получили аналог II закона Ньютона для неинерциальной системы отсчета, вращающейся вокруг неподвижной оси, здесь силы инерции:

$$\boldsymbol{F}_{\text{К}} = 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}$$ – сила Кориолиса

$$\boldsymbol{F}_{\text{ц.б.}} = m\omega^2\boldsymbol{\rho}$$ – центробежная сила

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{ц.б.}} + \boldsymbol{F}_{\text{К}}$$

Про эти силы инерции также можно сказать: в инерциальной системе отсчета эти силы не существуют, также не выполняется III закон Ньютона по отношению к силам инерции

– центробежной и силе Кориолиса.

6.3. Примеры действия сил инерции в природе

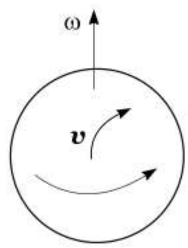


Рис. 6.5

Поступательное движение. Торможение или ускорение поезда: внутри нам кажется, что на нас действует сила, направленная против направления ускорения поезда.

Размывание берегов рек. Все видели, что у рек наблюдается размывание берегов: правый берег высокий и обрывистый, левый – пологий. Это явление можно объяснить действием сил инерции, а именно силы Кориолиса $\boldsymbol{F}_{\text{К}} = 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}$.

Пусть река течет на север со скоростью $\boldsymbol{v}$, угловая скорость вращения Земли $\boldsymbol{\omega}$ направлена вверх (см. Рис. 6.5, 6.6), тогда будет подмываться правый берег, со временем он становится крутым.

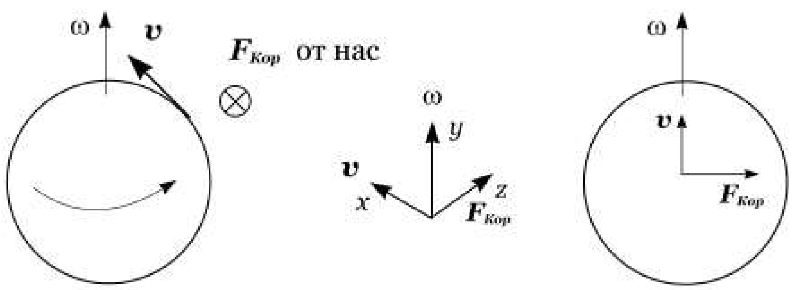


Рис. 6.6

Пусть река течет на юг (Рис. 6.7):

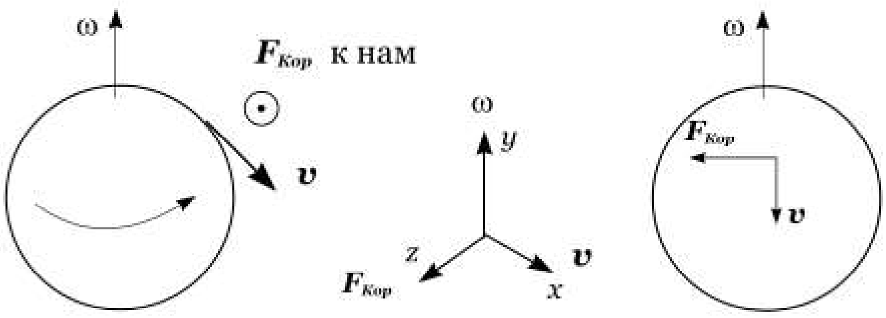


Рис. 6.7

В этом случае подмывается также правый берег.

В южном полушарии Земли наоборот, подмывается левый берег, предлагаю доказать вам это самостоятельно.

Центробежная сила встречается постоянно: в аттракционах, в троллейбусе, автомобиле и т.п. Основное отличие от силы Кориолиса в том, что для появления центробежной силы $\boldsymbol{F}_{\text{ц.б.}} = m\omega^2\boldsymbol{\rho}$ не требуется движение относительно системы отсчета.

В более общем случае, когда система отсчета движется с поступательным ускорением и вращается с постоянной скоростью, можно записать уравнение динамики:

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0 + 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega} + m\omega^2\boldsymbol{\rho},$$

где $\boldsymbol{F}_{\text{ин}} = -m\boldsymbol{a}_0$ – сила инерции поступательного движения, $\boldsymbol{F}_{\text{К}} = 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ – сила Кориолиса, $\boldsymbol{F}_{\text{ц.б.}} = m\omega^2\boldsymbol{\rho}$ – центробежная сила.

Контрольные вопросы

1. Как определяется неинерциальная система отсчета?
2. Запишите уравнения кинематики и динамики в системе отсчета, двигающейся с поступательным ускорением. Какая сила инерции появляется в этом случае?
3. Запишите выражение, связывающее ускорение во вращающейся системе отсчета с ускорением в инерциальной системе отсчета.
4. Запишите уравнение динамики во вращающейся системе отсчета.
5. Какие силы появляются в такой системе отсчета?
6. Каковы свойства сил инерции? Чем они отличаются от обычных сил?
7. Решите задачу: трамвай едет со скоростью 36 *км/ч* по рельсам, имеющим форму окружности с радиусом 50 *м*. Какая сила инерции действует на пассажира массой 80 кг, сидящего в движущемся трамвае? Найти дополнительную силу, действующую на безбилетника той же массы, бегущего со скоростью 2 *м/с* относительно трамвая от контролеров, по ходу движения трамвая. Куда эта сила будет направлена?
8. Решите задачу: маятник Фуко представляет собой массивный груз на длинном тросе, который качается по инерции и находится под действием силы Кориолиса, что приводит повороту плоскости колебаний относительно Земли. Найти силу Кориолиса, действующую на маятник массой 100 *кг*, двигающийся на север со скоростью 10 м/с на широте Петербурга (60° северной широты). Один оборот вокруг своей оси Земля делает за 23 часа 56 минут.

ТЕМА 7. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ.

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости.

Например, качание маятника, колебание ножек камертона, напряжение на конденсаторе в колебательном контуре. В зависимости от природы процесса различают колебания: 1) механические – колебания объектов, обладающих массой; 2) электромагнитные – колебания, определяемые электромагнитными полями и токами; 3) электромеханические – колебания в различных устройствах (микрофон, динамик), связанные как с механическим движением, так и с электромагнитным полем, токами.

Мы будем рассматривать механические колебания: маятник, струна, мост и другие. Эти колебания могут быть свободными и вынужденными.

Свободными называются колебания, происходящие в отсутствие внешних переменных воздействий на колебательную систему. Они возникают вследствие начального отклонения этой системы от состояния ее устойчивого равновесия.

Вынужденные колебания – это колебания, возникающие в какой либо системе под влиянием переменного внешнего воздействия.

Мы будем рассматривать только периодические колебания.

Периодические колебания характеризуются повторением состояния системы через равные промежутки времени, которые называются периодами *T*.

Если мы знаем период, то легко определить частоту колебаний (**число колебаний в единицу времени**).

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Круговая частота

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

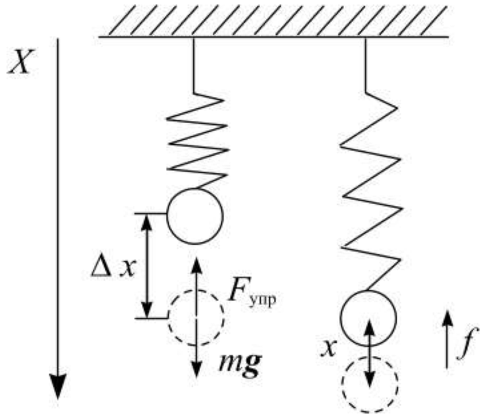


Рис. 7.1

Рассмотрим колебание груза, подвешенного на пружине:

под действием силы тяжести груз растягивает пружину на величину Δx (Рис. 7.1). Условия равновесия:

$$\boldsymbol{F}_{упр} + m\boldsymbol{g} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$F_{упр} = mg$$

$$k\Delta x_0 = mg$$

$$\Delta x_0 = \frac{mg}{k},$$

здесь k – жесткость пружины.

Отклоним груз на величину x вниз, затем его отпустим. Под действием результирующей силы он начнет двигаться вверх:

$$f = mg - k(\Delta x_0 + x) = mg - k\Delta x_0 - kx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{так как} \\ k\Delta x_0 = mg \end{matrix} \right| = -kx$$

Возвращающая сила упругости характеризуется следующими свойствами: 1) f пропорциональна смещению груза; 2) всегда направлена к положению равновесия.

Под действием такой силы груз начинает колебания.

Существует много различных сил, характеризующихся этими свойствами. Силы такого вида называются **квазиупругими**.

Уравнения колебаний всех тел, находящихся под действием квазиупругих сил, имеют вид, аналогичный уравнениям колебаний под действием сил упругости.

Рассмотрим движение груза на пружине. По второму закону Ньютона:

$$f = ma = -kx$$

Обозначим вторую производную по времени двумя точками:

$$a = x''(t) = \ddot{x}$$

Тогда

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Мы получили дифференциальное уравнение, характеризующее колебания под действием квазиупругих сил, для которого характерна сумма второй производной от координаты по времени и координаты. Решением такого уравнения будет уравнение гармонических колебаний:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

здесь A – амплитуда колебаний, ω_0 – круговая частота колебаний, φ_0 – начальная фаза, выражение под знаком косинуса $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ называется фазой колебаний.

Также решением может быть

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_1),$$

здесь $\varphi_1 = \varphi_0 + \pi/2$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только выражения с косинусом. Подставим $x(t)$ в дифференциальное уравнение.

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0{}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$-A\omega_0{}^2 \cancel{\cos(\omega_0 t + \varphi_0)} + \frac{k}{m} \cancel{A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)} = 0$$

$$-\omega_0{}^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Получили круговую частоту и период колебаний пружинного маятника. Эти колебания являются свободными и незатухающими.

Дифференциальное уравнение, описывающее любые гармонические колебания, имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$$

Пример применения квазиупругих сил: <u>математический и физический маятники.</u>

Математический маятник. Рассмотрим груз массой m на нити длиной l (Рис. 7.2). Размеры груза пренебрежимо малы, поэтому груз можно считать материальной точкой. Если мы отклоним груз на угол α, то на него будет действовать результирующая сила:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}$$

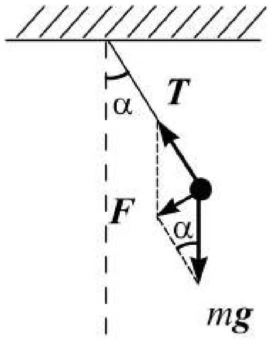


Рис. 7.2

Из построения видно, что

$$F = mg\sin\alpha$$

По второму закону Ньютона

$$mg\sin\alpha = ma_\tau$$

Мы будем рассматривать только малые колебания

$$\alpha \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin\alpha \approx \alpha \quad \Longrightarrow$$

$$g \cdot \alpha = a_\tau = l\varepsilon = l\ddot{\alpha}$$

Если заметить, что ускорение направлено в сторону, противоположную углу отклонения, то, учитывая знаки,

$$F = -mg\alpha$$

Получили квазиупругую силу, отсюда

$$-g \cdot \alpha = l\ddot{\alpha}$$

$$l\ddot{\alpha} + g \cdot \alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

Уравнение гармонических колебаний, причем

$$\omega_0{}^2 = \frac{g}{l}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

<u>Физический маятник:</u> массивное тело, которое может свободно вращаться вокруг оси, причем ее ось не проходит через центр масс.

Расстояние от оси вращения до центра масс обозначим буквой l (Рис. 7.3). Момент возвращающей силы (квазиуругая сила):

$$M = -mgl\sin\alpha$$

Запишем основное уравнение вращательного движения

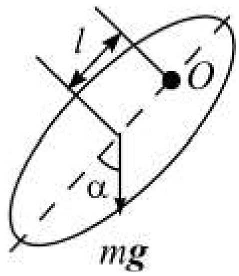


Рис. 7.3

$$M = I\varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$-mgl\sin\alpha = I\varepsilon$$

$$\left.\begin{matrix} \sin\alpha \approx \alpha, \text{ при малых } \alpha \\ \varepsilon = \ddot{\alpha} \end{matrix}\right| \quad \Rightarrow$$

$$I\ddot{\alpha} + mgl\cdot\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I}\cdot\alpha = 0$$

Получили дифференциальное уравнение, решением которого является уравнение гармонических колебаний с характеристиками.

$${\omega_0}^2 = \frac{mgl}{I}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Проанализируем свойства гармонических колебаний

1. Определим фазу колебаний *x,v,a*. Для этого вспомним, что $\sin\varphi = \cos(\varphi - \pi/2) \ \Rightarrow$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$v = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0 - \pi/2) =$$

$$= A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2) =$$

$$a = -A{\omega_0}^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A{\omega_0}^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi)$$

Ускорение – в противофазе с отклонением *x* от равновесия, скорость опережает *x* по фазе на $\pi/2$ (см. Рис. 7.4).

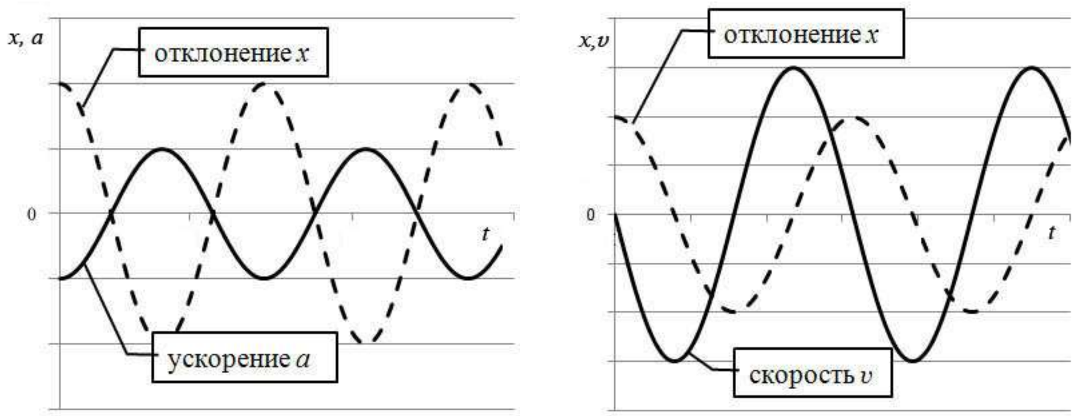


Рис. 7.4

Решим следующую задачу: пусть нам известны начальные координаты и скорость, круговая частота при гармонических колебаниях точки. Найти амплитуду и начальную фазу.

Дано $t = 0$ x_0, v_0, ω_0 $A - ?$ $\varphi_0 - ?$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= A\cos\varphi_0 \\ v_0 &= -A\omega_0\sin\varphi_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos\varphi_0 &= x_0/A \\ \sin\varphi_0 &= -v_0/A\omega_0 \end{aligned}$$

$$\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0 = 1$$

$$\frac{{x_0}^2}{A^2} + \frac{{v_0}^2}{A^2{\omega_0}^2} = 1$$

$$\frac{1}{A^2}\left({x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{{\omega_0}^2}\right) = 1$$

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{{\omega_0}^2}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0} = -\frac{v_0/A\omega_0}{x_0/A} = -\frac{v_0}{x_0\omega_0}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = -\frac{v_0}{x_0\omega_0}$$

Для определения начальной фазы необходимо выбрать то значение фазы, которое дает правильные знаки синуса и косинуса.

7.2. Сложение колебаний

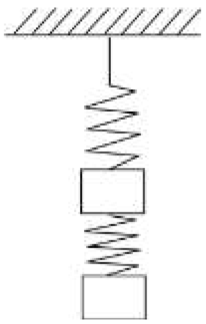


Рис. 7.5

Если наблюдается сложение колебаний, направленных в одну и ту же сторону (например, интерференция волн на воде или, если к одному грузику на пружинке прикрепить другой груз (Рис. 7.5)), то удобно пользоваться векторным представлением гармонических колебаний: колебание можно представить, как проекцию вектора, вращающегося с угловой скоростью ω_0, длина вектора равна A.

$$x = A\cos\varphi = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Если наблюдается сложение колебаний двух объектов, причем $\omega_0{}' = \omega_0{}''$ – частоты одинаковы, мы можем представить колебание как сумму векторов, вращающихся с одной и той же угловой скоростью. Угол между векторами будет оставаться постоянным (см. Рис. 7.6).

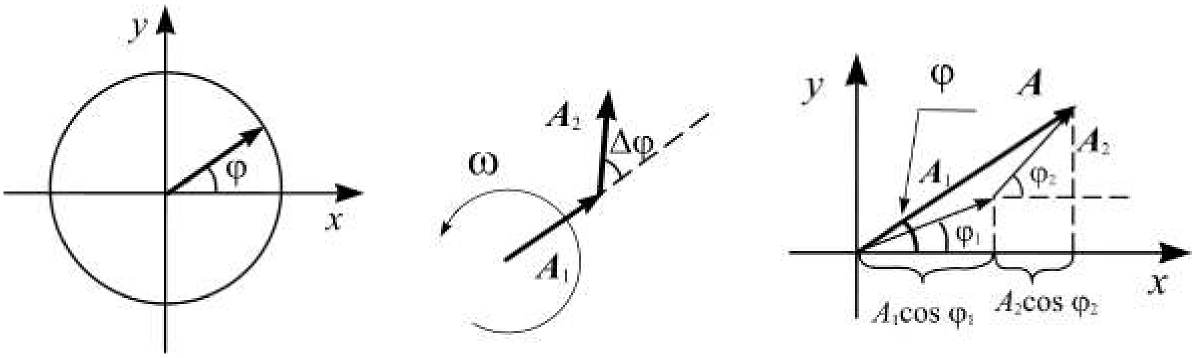


Рис. 7.6

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega_0 t + \varphi_0'' - \omega_0 t - \varphi_0' = \varphi_0'' - \varphi_0'$$

По правилу суммирования векторов, амплитуда колебаний:

$$A = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_1\cos\Delta\varphi}$$

Фаза колебаний φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin(\omega_0 t + \varphi_0{}') + A_2\sin(\omega_0 t + \varphi_0{}'')}{A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_0{}') + A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_0{}'')}$$

Биения. Если накладываются колебания с различной частотой, в общем случае наблюдается достаточно сложная картина, но, если частоты колебаний очень близки ($\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1$), тогда наблюдаются биения (Рис. 7.7).

Суммируем

$$x_1 = a\cos\omega_0 t$$
$$x_2 = a\cos\ (\omega_0 + \Delta\omega)t$$

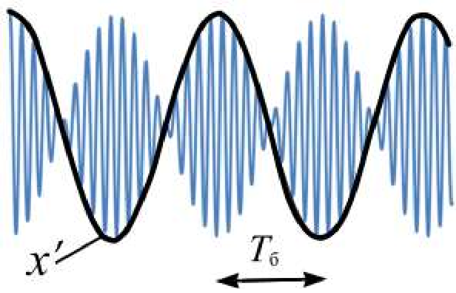


Рис. 7.7

Вспомним, что

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$A = \omega_0 t$$
$$B = (\omega_0 + \Delta\omega)t$$
$$\frac{A+B}{2} = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega t}{2}$$
$$\frac{A-B}{2} = -\frac{\Delta\omega t}{2}$$

$$x_1 + x_2 = a\cos\omega_0 t + a\cos\ (\omega_0 + \Delta\omega)t =$$

$$= 2a\cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega t}{2}\right)\cos\frac{\Delta\omega t}{2} \approx 2a\cos\omega_0 t\cos\frac{\Delta\omega t}{2}$$

$$x = 2a\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\cos\omega_0 t$$

$$x' = 2a\cos\frac{\Delta\omega t}{2}$$

$$x'' = \cos\omega_0 t$$

$$x = x' \cdot x''$$

Частота биений в 2 раза больше частоты x'.

$$\omega_б = 2\frac{\Delta\omega}{2} = \Delta\omega$$

7.3. Затухающие колебания

В реальности все свободные колебания являются затухающими вследствие действия диссипативных сил (трение, сопротивление жидкости, воздуха). Эти силы приводят к убыли энергии маятника и приводят к уменьшению амплитуды со временем. Вид зависимости координаты маятника от времени – Рис. 7.8.

Пусть в системе действует обобщенная сила сопротивления, пропорциональная скорости

$$f = -r\dot{x}$$

Направление силы противоположно вектору скорости.

Запишем второй закон Ньютона.

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

Перепишем это уравнение следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \qquad (1)$$

здесь $2\beta = r/m, {\omega_0}^2 = k/m,$ где ω_0 – круговая частота маятника в отсутствие сопротивления среды ($r = 0$), такая частота называется <u>собственной</u>.

Предположим, что решением этой системы будет:

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Продифференцируем по времени:

$$\dot{x} = \dot{A}(t)\cos(\omega t + \varphi_0) - \ A(t)\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x} = \ddot{A}(t)\cos(\omega t + \varphi_0) - \ 2\dot{A}(t)\omega\sin(\omega t + \varphi_0) - A(t)\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Подставим в уравнение (*), также запишем фазу в виде $\varphi = \omega t + \varphi_0$

$$\ddot{A}\cos\varphi - 2\dot{A}\omega\sin\varphi - A\omega^2\cos\varphi + 2\beta\dot{A}\cos\varphi - 2\beta A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) + {\omega_0}^2 A\cos\varphi = 0$$

$$\cos\varphi\left(\ddot{A} - A\omega^2 + 2\beta\dot{A} + {\omega_0}^2 A\right) - \sin\varphi\left(2\dot{A}\omega + 2\beta A\omega\right) = 0$$

Для того, чтобы уравнение всегда выполнялось, необходимо равенство нулю скобок:

$$\ddot{A} - A\omega^2 + 2\beta\dot{A} + {\omega_0}^2 A = 0 \qquad (2)$$

$$\dot{A} + \beta A = 0 \qquad (3)$$

Уравнение (3): $dA/dt = -\beta A \;\Rightarrow\; dA/A = -\beta dt$

После интегрирования получим:

$$\ln A = -\beta t + \ln A_0$$

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

Производные от амплитуды:

$$\dot{A} = -\beta A_0 e^{-\beta t} = -\beta A$$

$$\ddot{A} = \beta^2 A$$

Подставим в (2):

$$\beta^2 A - A\omega^2 - 2\beta^2 A + {\omega_0}^2 A = 0$$

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 - \beta^2$$

Зная зависимость от времени амплитуды и частоту колебаний, можно записать уравнение затухающих колебаний:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}$, коэффициент затухания $\beta = r/2m$, собственная круговая частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Отсюда можно получить:

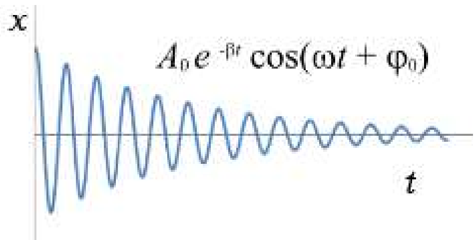


Рис. 7.8

период затухающих колебаний

$$T = 2\pi/\sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2},$$

логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln[A(t)/A(t+T)] = \beta T$$

добротность колебательной системы

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e$$

Здесь N_e – число колебаний системы, совершаемых за время, при котором амплитуда уменьшается в e раз.

Из формулы $\omega^2 = {\omega_0}^2 - \beta^2$ следует, что при увеличении коэффициента β до величины $\beta = \omega_0$ получим нулевую частоту колебаний. В этом случае движение носит апериодический характер – система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний (см. Рис. 7.9).

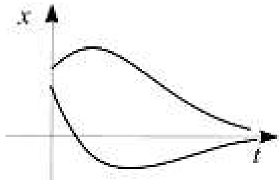


Рис. 7.9

7.4. Вынужденные колебания. Резонанс

Вынужденными называются колебания, которые возникают в результате действия периодической вынуждающей силы.

Пусть сила изменяется по закону

$$f = F_0 \cos \omega t$$

В уравнении учитывается квазиупругая сила и сила сопротивления среды

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

Перепишем это уравнение в стандартном виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + {\omega_0}^2 x = f_0 \cos \omega t \qquad (4)$$

где $f_0 = F_0/m$ – приведенная сила, $\beta = r/2m$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – собственная частота колебаний системы.

Поведение системы можно характеризовать переходными процессами (в начале колебаний) и установившимися колебаниями. Нас интересуют как раз установившиеся в системе колебания. Пусть они имеют вид:

$$x = a \cos(\omega t - \varphi)$$

Найдем $\dot{x}$ и $\ddot{x}$

$$\dot{x} = -a\omega \sin(\omega t - \varphi) = a\omega \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) = a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

Запишем отдельные части уравнения (4):

$$\ddot{x} = a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

$$2\beta\dot{x} = 2\beta a\omega \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$$

$${\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 a \cos(\omega t - \varphi)$$

$$f = f_0 \cos \omega t$$

Сумма трех первых равна четвертому выражению – приведенной силе. Колебания установившиеся, поэтому разность фаз у них фиксирована. Эти колебания можно показать на диаграмме векторов (см. Рис. 7.10).

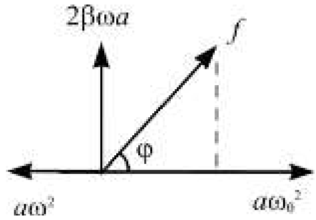


Рис. 7.10

Найдем разность фаз приведенной силы и координаты, скорости, ускорения:

$$\varphi_f - \varphi_x = \omega t - \omega t + \varphi = \varphi$$

$$\varphi_{\dot{x}} - \varphi_x = \omega t - \varphi + \pi/2 - \omega t + \varphi = \pi/2$$

$$\varphi_{\ddot{x}} - \varphi_x = \omega t - \varphi + \pi - \omega t + \varphi = \pi$$

Из диаграммы видно, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2}$$

Амплитуда колебаний может быть найдена из уравнения:

$$({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\beta^2\omega^2 a^2 = {f_0}^2$$

$$a^2 = \frac{{f_0}^2}{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Мы получили искомое установившееся колебание

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\beta a}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\right)$$

Если изменять частоту вынуждающей силы, будет меняться амплитуда колебаний и при некоторой частоте амплитуда колебаний достигнет максимального значения. Это явление называется <u>резонансом</u>, а соответствующая частота – <u>резонансной частотой</u>.

Найдем резонансную частоту. Если рассматривать формулу для амплитуды, то подкоренное выражение должно быть минимальным, а следовательно, ее производная по ω должна быть равна нулю.

$$[({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]' = 0$$

$$((\omega_0{}^2 - \omega^2)^2)' = -2(\omega_0{}^2 - \omega^2)2\omega = -4\omega(\omega_0{}^2 - \omega^2)$$

$$(4\beta^2\omega^2)' = 8\omega\beta^2$$

$$-\omega_0{}^2 + \omega^2 + 2\beta^2 = 0$$

$$\omega^2 = \omega_0{}^2 - 2\beta^2$$

Получили частоту резонанса

$$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\beta^2}$$

Подставив ω в выражение для амплитуды, получим

$$a_{\text{рез}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\beta^2 + \omega^2}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\beta^2 + \omega_0{}^2 - 2\beta^2}} \Rightarrow$$

$$a_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}}$$

Пусть коэффициент затухания – небольшая величина $\beta \ll \omega_0$, тогда амплитуда обратно пропорциональна коэффициенту затухания, а следовательно и силе сопротивления среды.

$$a_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}$$

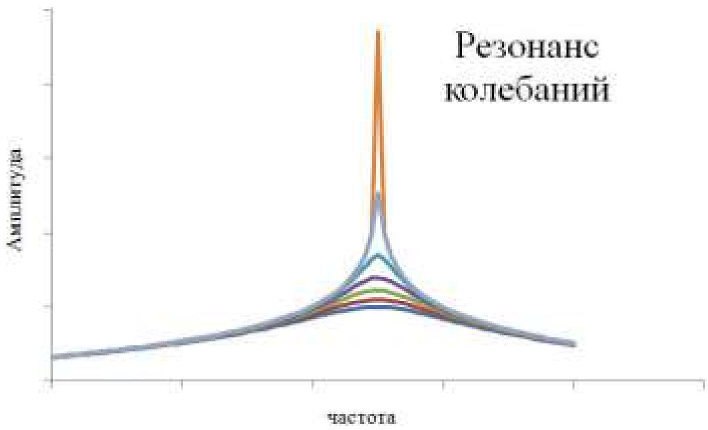


Рис. 7.11

Вид резонансной кривой (см. Рис. 7.11): амплитуда в резонансе резко возрастает с уменьшением коэффициента затухания. Следует отметить, что процесс резонанса не мгновенный, колебания достигают максимума не сразу, энергия колебаний «накачивается» за несколько шагов.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения свободных и вынужденных колебаний.
2. Что такое квазиупругие колебания? Уравнение гармонических колебаний? Как записывается дифференциальное уравнение для квазиупругих сил?
3. Что такое математический и физический маятники? Как определяют период их колебаний?
4. При каких условиях наблюдаются биения?
5. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Как выглядит решение этого уравнения? Определите коэффициент затухания, собственную круговую частоту, а также круговую частоту затухающих колебаний.
6. Как вычисляются логарифмический декремент затухания и добротность колебательной системы?
7. Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, а также решение для установившихся колебаний.
8. Как определяется амплитуда и фаза вынужденных колебаний? Что такое резонанс?
9. Решите задачу: математический маятник с нитью длиной 0,5 м колеблется в поле тяжести Земли. Найти период колебаний. Какой период будет у такого же маятника на Луне? Ускорение свободного падения на поверхности Луны равно 1,62 м/с^2, на Земле ускорение свободного падения считать равным 9,8 м/с^2.
10. Решите задачу: пружинный маятник представляет собой груз массой 10 г на пружине жесткости 100 Н/м. Найти частоту его колебаний в вакууме и в жидкости с коэффициентом сопротивления r, равным $1\ \text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ (сила сопротивления движению $\boldsymbol{F} = -\,\mathrm{r}\boldsymbol{v}$).

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ТЕМА 8. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

Цель молекулярной физики – исследование газов, твердых тел, жидкостей.

При таком исследовании невозможно проследить движение каждой молекулы с использованием II закона Ньютона, однако начинают проявляться новые законы, которые изучаются с помощью математической статистики – отсюда название – статистическая физика. В то же время, если абстрагироваться от характера движения частиц, а только изучать превращения энергии системы, мы получаем науку – термодинамику, которая из-за своего обобщенного характера используется как в физике, так и в химии, технике, информатике и других областях.

В основе статистической физики лежит молекулярно-кинетическая теория, предполагающая, что газообразные, жидкие и твердые вещества состоят из атомов, которые находятся в непрерывном движении.

Экспериментальным подтверждением такого движения является броуновское движение – видимое в микроскоп постоянное хаотическое движение частиц малого размера (цветочной пыльцы) в жидкости.

Для описания свойств газа в молекулярно-кинетической теории используют модель ***идеального газа***.

Идеальным называется газ, молекулы которого имеют пренебрежимо малый объем и не взаимодействуют друг с другом на расстоянии. Столкновения молекул между собой и со стенками сосуда абсолютно упруги.

В нормальных условиях (температура $t = 0°\text{C}$, давление $p = 1{,}01 \cdot 10^5 \text{Па}$) диаметр молекул воздуха примерно в 100 раз меньше среднего расстояния между молекулами. Поэтому при нормальных условиях кислород, азот, гелий и др. с достаточной точностью можно считать идеальными.

Дадим понятия ***атомного и молекулярного веса***.

Атомным весом химического элемента называется отношение массы атома этого элемента к 1/12 массы изотопа C^{12}.

аналогично:

Молекулярным весом *(M)* называется отношение массы молекулы вещества к 1/12 массы изотопа C^{12}.

Для упрощения работы с атомными и молекулярными весами вводится понятие грамм-молекулы или моля.

Количество данного вещества, масса которого, выраженная в граммах, равна его молекулярному весу, называется молем.

В каждом моле любого вещества находится одно и то же количество молекул, равное

$$N_A = \frac{\mu}{M m_{\text{ед}}},$$

здесь μ – масса моля, M – молекулярный вес, $m_{\text{ед}} = \frac{1}{12} m_{C^{12}} - \frac{1}{12}$ доля массы атома изотопа C^{12} – атомная единица массы (а.е.м.).

$N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – называется числом Авогадро.

Атомная единица массы

$$m_{ед} = \frac{1г}{N_A} = \frac{10^{-3}}{6.023 \cdot 10^{23}} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} кг$$

$$m_{\text{ед}} = \frac{1\text{г}}{N_A} = \frac{10^{-3}}{6{,}023 \cdot 10^{23}} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\text{кг}$$

8.1. Параметры идеального газа

Способом исследования вещества, например, газа, является измерение его параметров. Этими параметрами являются:

1) Температура – характеристика, относительно которой известно, что тепловая энергия перетекает при контакте от более нагретого тела к телу с более низкой температурой.

2) Давление – величина силы, с которой газ давит на единицу площади стенок сосуда, в котором он находится.

$$p = \frac{F}{S}$$

3) V – объем газа, жидкости или твердого тела.

4) Масса вещества.

5) Его молекулярный вес.

Всякая термодинамическая система обладает в любом равновесном состоянии определенным набором этих параметров. В неравновесной системе параметры могут не иметь определенного значения, например: тело может иметь различную температуру в различных точках. Если такое тело изолировать, то оно придет в состояние равновесия, при котором температура будет одинаковой во всех точках.

Равновесное состояние можно изобразить точкой на графике:

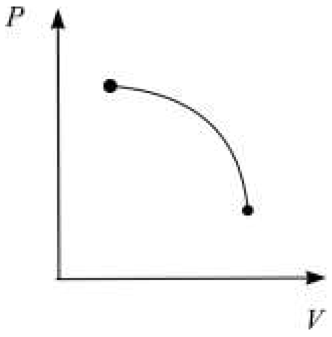


Рис. 8.1

Если система проходит равновесные состояния, их можно изобразить кривой на графике (см. Рис. 8.1).

Рассмотрим такую характеристику системы тел, как внутренняя энергия:

Внутренней энергией называется энергия тела за вычетом кинетической энергии тела как целого и потенциальной энергии тела в поле внешних сил.

Например, если мы нагрели газ в сосуде, его кинетическая и потенциальная энергия не изменились, но внутренняя энергия выросла. Внутренняя энергия является функцией состояния, то есть она зависит от параметров состояния $E = f(T,V,p,m)$.

В понятие внутренней энергии входят: кинетическая энергия хаотического движения молекул, потенциальная энергия взаимодействия между молекулами и внутримолекулярная энергия.

Внутренняя энергия тесно связана с таким параметром термодинамической системы, как температура.

Рассмотрим, как можно проградуировать температурную шкалу в ***градусах Цельсия***. Выберем такую характеристику рабочего тела (газа, жидкости), как объем.

Измерим объем V_0 при 0°C – температуре затвердевания льда под атмосферным давлением, а также измерим V_{100} при температуре кипения воды также под атмосферным давлением. Разделим всю шкалу на 100, тогда

$$t[°\mathrm{C}] = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} \cdot 100°\mathrm{C}$$

Проградуировав таким образом термометр, его можно использовать для измерения температуры.

Состояние некоторой массы идеального газа определяется значением трех параметров: *p, V, t* [°С]. Экспериментально связи между этими параметрами получены Бойлем и Мариоттом, Гей-Люссаком, Шарлем.

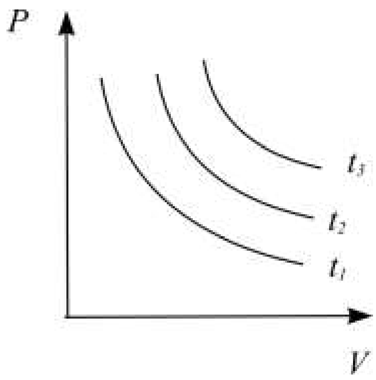


Рис. 8.2

Закон Бойля-Мариотта гласит, что для данной массы газа при постоянной температуре давление газа изменяется обратно пропорционально его объему.

$$pV = const \quad (t = const)$$

Кривые на диаграмме (p, V) являются гиперболами (Рис. 8.2), причем с ростом температуры кривые оказываются дальше от начала координат. Эти кривые называются изотермами. Те же процессы (изотермические) на диаграммах *V-t* и *p-t*: (см. Рис. 8.3)

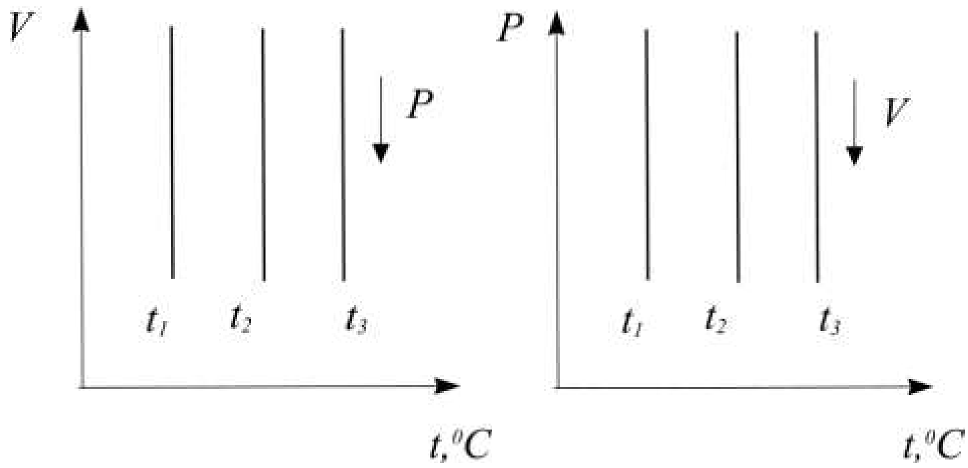


Рис. 8.3

Закон Гей-Люссака гласит, что при неизменном давлении объем данной массы идеального газа меняется линейно с температурой:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \qquad (p = const)$$

Аналогичная зависимость (закон Шарля) имеется для давления при постоянном объеме

$$p = p_0 (1 + \alpha t) \qquad (V = const)$$

В этих уравнениях t – температура в градусах Цельсия, V_0, p_0 – объем и давление при 0°C. Коэффициент α имеет одинаковое значение

$$\alpha = \frac{1}{273,15}\,\text{град}^{-1}$$

Процесс с $p = const$ называется изобарическим, на диаграмме $V - t$ изображается прямой, которая называется изобарой. Аналогично выглядят изохоры $V = const$ в координатах $p - t$.

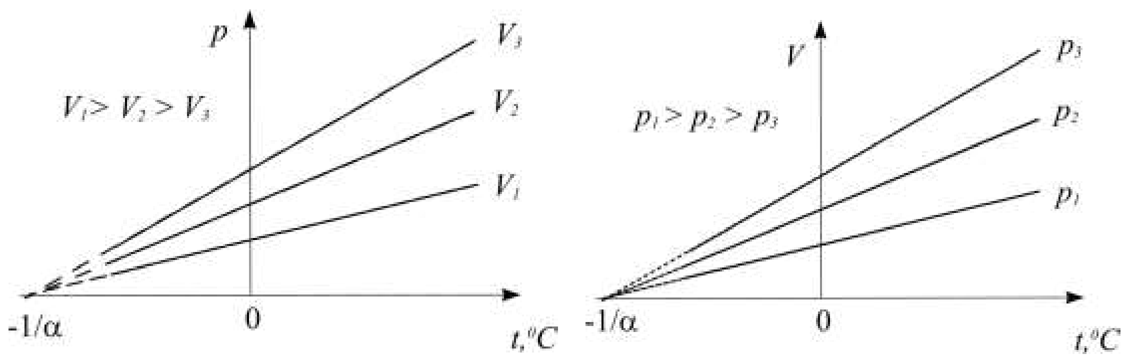


Рис. 8.4

Заметим, что все изохоры и изобары (см. Рис. 8.4) пересекают ось ординат в точке, определяемой уравнением

$$1 + \alpha t = 0$$

$$t = -\frac{1}{\alpha} = -273,15°\text{C}$$

Сместив начало координат в эту точку, мы перейдем от шкалы температур по Цельсию к шкале Кельвина, которая называется абсолютной. Единицы измерения – K. Связь шкал:

$$T\,[K] = t\,[°\text{C}] + 273,15$$

Температура 0°C соответствует 273,15 K.

Перепишем уравнения изобар и изохор:

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0\left(1 + \alpha\left(T - \frac{1}{\alpha}\right)\right) = \alpha V_0 T$$

$$p = p_0(1 + \alpha t) = \alpha p_0 T$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (p = const)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (V = const)$$

Законы Бойля-Мариотта, Гей-Люссака и Шарля являются приближенными по отношению к реальным газам. Только идеальные газы точно следуют этим законам. Поэтому они называются законами идеального газа.

Произвольное изменение параметров идеального газа массы m подчиняется уравнению Менделеева-Клайперона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

здесь p, V, T – параметры идеального газа в любой точке равновесного процесса, μ – масса моля газа, $R = 8{,}31\ \text{Дж}/(\text{град} \cdot \text{моль})$ – универсальная газовая постоянная.

Этот закон является обобщением предыдущих.

8.2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

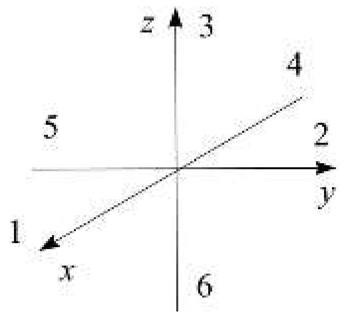


Рис. 8.5

Наибольших успехов достигла молекулярно-кинетическая теория в объяснении процессов в газах. Сейчас мы выведем величину давления газа на стенки сосуда.

При движении атомов все направления равновероятны. Рассчитаем давление в предположении, что атомы движутся в шести направлениях (Рис. 8.5); причем скорости молекул в каждом направлении одинаковы. (Это очень грубое приближение, однако, полученный результат совпадает с точным расчетом).

При ударе атома о стенку изменение импульса атома равно

$$\Delta \boldsymbol{p}_{\text{ат}} = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = |\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_2| = -2m\boldsymbol{v}_1$$

По второму закону Ньютона

$$\boldsymbol{F}_1 \Delta t = \Delta \boldsymbol{p} = -2m\boldsymbol{v}_1$$

– импульс силы, действующей на атом.

По 3-му закону Ньютона импульс силы, действующей на стенку (см. Рис. 8.6)

$$\boldsymbol{F}_{\text{ст}}\Delta t = -\boldsymbol{F}_1\Delta t = 2m\boldsymbol{v}_1$$

За время Δt ударится о стенку ΔN атомов

$$\Delta N = n\frac{1}{6}V = \begin{vmatrix} V = hS \\ h = v_1\Delta t \end{vmatrix} = n\frac{1}{6}Sv_1\Delta t,$$

здесь $n = \frac{N}{V}$ – концентрация атомов

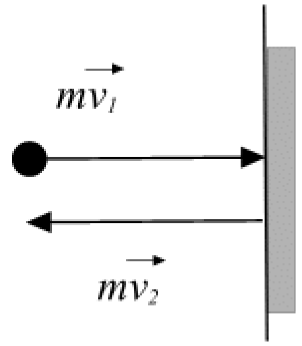


Рис. 8.6

$$F_\Sigma \Delta t = \Delta N \Delta p = 2m\boldsymbol{v}_1 n\frac{1}{6}Sv_1\Delta t$$

$$F_\Sigma = \frac{1}{3}m{v_1}^2 nS$$

$$p = \frac{F_\Sigma}{S} = \frac{1}{3}m{v_1}^2 n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}m{v_1}^2\right)n = \frac{2}{3}n\varepsilon,$$

здесь $\varepsilon = \frac{1}{2}m{v_1}^2$– кинетическая энергия молекулы

$$p = \frac{2}{3}n\varepsilon$$

Если рассматривать молекулы движущимися во всех направлениях с произвольными скоростями, то получается аналогичная формула – основное уравнение молекулярно-кинетической теории:

$$p = \frac{2}{3}n\langle\varepsilon\rangle$$

где $\langle\varepsilon\rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул газа

Вспомним уравнение Менделеева-Клайперона

$$pV = \frac{m}{\mu}RT$$

здесь $\frac{m}{\mu} = \nu$ – число молей

$$p = \frac{\nu}{V}RT = \frac{\nu N_A}{V}\frac{R}{N_A}T = \begin{vmatrix} \text{концетрация } n = \dfrac{\nu N_A}{V} \\ k = \dfrac{R}{N_A} \end{vmatrix} = nkT$$

$k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро.

$$p = nkT$$

– получили аналог уравнения Менделеева-Клайперона

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}\frac{p}{n} = \frac{3}{2}\frac{nkT}{n}$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}kT$$

– средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул.

Контрольные вопросы

1. Что такое идеальный газ?
2. Дайте определение молекулярного веса, моля вещества.
3. Каковы основные параметры идеального газа?
4. Опишите характеристики внутренней энергии тела.
5. Сформулируйте законы Бойля-Мариотта, Гей-Люссака, Шарля и Менделеева-Клайперона.
6. Запишите основное уравнение молекулярно-кинетической теории.
7. Чему равна средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул.
8. Решите задачу: один моль идеального газа имеет температуру 100 °С, находится под давлением $2 \cdot 10^5$ Па. Найти его объем.
9. Решите задачу: какова концентрация молекул газа при нормальных условиях? (Т = 273 К, р = $1{,}01 \cdot 10^5$ Па).

ТЕМА 9. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

9.1. Закон Максвелла распределения молекул по скоростям

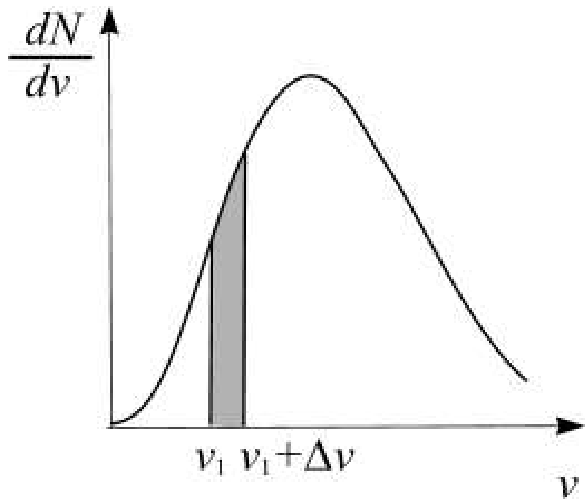


Рис. 9.1

Невозможно вычислить характеристики (положение, скорость) каждой молекулы газа, однако можно определить, какая доля молекул имеет данную скорость.

Если мы построим зависимость величины $\frac{dN}{dv}$ от v (Рис. 9.1), то сможем вычислить число молекул, имеющие скорость внутри интервала Δv.

$$\Delta N = \frac{dN}{dv}\Delta v$$

Если мы поделим эту величину на N – общее число частиц, то получим функцию распределения частиц по скоростям

$$f(v) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dv}$$

Функция $f(v)$ называется также плотностью вероятности.

Смысл этой функции:

$$f(v_1)\Delta v = \frac{1}{N}\frac{dN}{dv}\Delta v$$

– вероятность того, частица имеет скорость в интервале от v_1 до $v_1 + \Delta v$.

Как вам известно, вероятность какого-либо события – величина, изменяющаяся в пределах от 0 до 1, то есть $F \in [0;1]$. Для определения вероятности события с помощью плотности вероятности, эту величину интегрируют

$$F = \int\limits_{v_1}^{v_2} f(v)\,dv,$$

причем $\int_0^\infty f(v)\,dv = 1$.

Рассмотрим закон распределения Максвелла молекул по скоростям, он имеет следующий вид:

$$f(v) = Ae^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2$$

Так как $\int_0^\infty f(v)\,dv = 1$, мы можем найти нормировочный множитель A:

$$A\int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\,dv = 1$$

$$A = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\,dv} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2$$

Мы получили окончательный вид распределения Максвелла.

Отметим, что давление и объем газа на распределение не влияют.

Число молекул, приходящихся на диапазон скоростей от v_1 до $v_1 + dv$

$$dN = Nf(v_1)dv = N4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2dv$$

9.2. Определение наиболее вероятной, средней и среднеквадратичной скоростей

Как известно из теории вероятности, если известна функция распределения (плотность вероятности), то наиболее вероятная скорость соответствует вершине кривой распределения ($v_{\text{вер}}$). Средняя скорость определяется формулой

$$\bar{v} = \int_0^\infty vf(v)\,dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Среднеквадратичная скорость:

$$v^2{}_{\text{ср.кв.}} = \int_0^\infty v^2f(v)\,dv$$

Эту величину можно определить, зная среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT$$

$$v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Наиболее вероятная скорость:

$$\frac{df(v)}{dv} = 0$$

$$\frac{d\left(e^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2\right)}{dv} = 0$$

$$-\frac{m}{2kT}2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2 + 2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} = 0$$

$$1 - \frac{mv^2}{2kT} = 0$$

$$v^2 = \frac{2kT}{m}$$

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

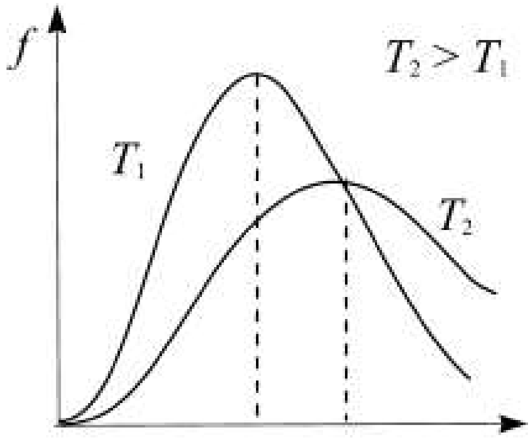


Рис. 9.2

Зная наиболее вероятную скорость, получим наибольшее значение функции распределения *f(v)*:

$$f(v)_{\text{макс}} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}\frac{2kT}{m}}\frac{2kT}{m} = \frac{4}{e}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Рассмотрим, как сдвигается вершина функции распределения Максвелла, если температура T увеличивается (см. Рис. 9.2). Вершина сдвигается в сторону больших скоростей, при этом значение функции уменьшается.

Следует отметить, что функция быстро уменьшается с ростом *v:*

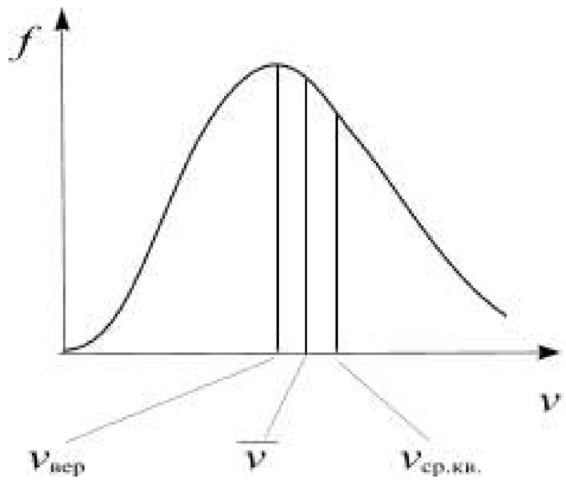


Рис. 9.3

при $v=3v_{вер}$ $\frac{f(3v_{\text{вер}})}{f(v_{\text{вер}})} = 1{,}1 \cdot 10^{-3}$

при $v=10v_{вер}$ $\frac{f(10v_{\text{вер}})}{f(v_{\text{вер}})} = 4 \cdot 10^{-42}$

Подсчитаем среднюю скорость молекул кислорода при 300 К:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{\pi\, 32 \cdot 10^{-3}}} \approx 500 \text{ м/с}$$

На Рис. 9.3 показаны примерные положения вероятной, средней и среднеквадратичной скорости по отношению к кривой распределения Максвелла.

9.3. Закон Больцмана распределения молекул в потенциальном поле сил. Барометрическая формула

Рассмотрим распределение молекул воздуха в гравитационном поле Земли в предположении, что температура воздуха повсюду одинакова. Атмосферное давление на высоте h обусловлено весом вышележащих слоев газа. Обозначим давление p на высоте h, тогда разность давлений на высоте $h+dh$ и h равна

$$p - (p + dp) = \rho g dh$$

$$dp = -\rho g dh$$

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT} = \rho$$

$$dp = -\frac{p\mu g}{RT}dh$$

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = -\int_{h_0}^{h_1} \frac{\mu g}{RT} dh$$

$$\ln\frac{p_1}{p_0} = -\frac{\mu g}{RT}(h_1 - h_0), \qquad \text{если } h = h_1 - h_0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{p_1}{p_0} = e^{-\frac{\mu g h}{RT}}$$

$$p_1 = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}} \ \text{– барометрическая формула}$$

Из этой формулы следует, что давление с высотой h убывает тем быстрее, чем тяжелее газ и чем ниже температура.

Вспомним $\left.\begin{array}{r} R = N_A k \\ \mu = N_A m \\ p = nkT \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \qquad \text{– формула Больцмана}$$

-где m – масса молекулы, $mgh = \varepsilon_{п}$ – потенциальная энергия молекулы в поле тяжести Земли, n_0 – концентрация молекул на нулевом уровне, n – концентрация молекул на высоте h.

Больцман показал, что такое распределение справедливо не только в случае земного тяготения, но и в любом потенциальном поле сил:

$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_{п}}{kT}}$$

В то время как распределение Максвелла дает распределение молекул по значениям кинетической энергии, закон Больцмана дает распределение частиц по значениям потенциальной энергии.

9.4. Теорема Больцмана о степенях свободы

Числом степеней свободы механической системы называется количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы.

N материальных точек: $3N$ степеней свободы – 3 степени свободы на материальную точку.

2 материальных точки, жестко связанные, – 5 степеней свободы – 3 координаты центра, 2 угла вращения.

2 материальных точки, на пружинке, – 6 степеней свободы – 3 координаты центра, 2 угла вращения, 1 расстояние между точками.

Больцман доказал теорему о равном распределении энергии системы молекул по степеням свободы.

На каждую молекулу, на одну степень свободы приходится энергия $kT/2$.

Для одноатомного газа, имеющего 3 степени свободы на молекулу, известно, что средняя кинетическая энергия молекулы:

$$\varepsilon = \frac{3}{2}kT \Longrightarrow \frac{1}{2}kT \text{ приходится на одну степень свободы}$$

Средняя кинетическая энергия жесткой двухатомной молекулы:

$$\varepsilon = \frac{5}{2}kT$$

Средняя кинетическая энергия двухатомной молекулы, с учетом колебаний:

$$\varepsilon = \frac{6}{2}kT$$

В большинстве задач требуется учитывать не только кинетическую, но и потенциальную энергию молекулы, тогда средняя энергия 2-атомной молекулы с с учетом колебаний (при высоких температурах):

$$\varepsilon = \frac{7}{2}kT$$

В общем случае

$$\varepsilon = \frac{i}{2}kT,$$

где i – число степеней свободы, $i = n_{\text{пост}} + n_{\text{вращ}} + 2n_{\text{колеб}}$.

Как показывают эксперименты, при комнатных температурах в формуле средней энергии молекулы учитываются только поступательное и вращательное движение молекул. При нагреве многоатомного газа до нескольких сотен Кельвина нужно учитывать и колебательное движение. Это связано с квантовыми эффектами и объясняется в рамках квантовой физики.

9.5. Примеры решения задач

1. По распределению Максвелла молекул по скоростям найдем распределение Максвелла молекул по кинетическим энергиям.

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

Совпадают не функции распределения по скоростям и энергиям, а дифференциалы:

$$f(v)dv = f(\varepsilon_к)d\varepsilon_к$$

$$d\varepsilon = d(mv^2/2) = mvdv$$

$$f(\varepsilon_к) = \frac{f(v)}{mv} = \frac{4\pi}{m}\frac{m}{2\pi kT}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon_к}{kT}}\frac{v^2}{v} = \frac{2}{kT}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon_к}{kT}}v =$$

$$= \left|\varepsilon_к = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\varepsilon_к}{m}}\right| = \frac{2}{kT}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon_к}{kT}}\sqrt{\frac{2\varepsilon_к}{m}} \Rightarrow$$

$$f(\varepsilon_к) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\varepsilon_к}{kT}}\sqrt{\varepsilon_к}$$

Дано:
$n_0 = 10^6$ м$^{-3}$ $h = 2$ м $T = 300$ K. 1) $m_1 = 10^{-20}$ кг 2) $m_2 = 10^{-}$

2. Вы зашли в пыльное помещение, причем у пола концентрация пылинок $n_0 = 10^6$ м$^{-3}$. Найти концентрацию пылинок на высоте $h = 2$м. $T = 300K$. Масса пылинок: 1) $m_1 = 10^{-20}$ кг; 2) $m_2 = 10^{-24}$ кг.

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_п}{kT}} = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = n_0 e^{-\frac{10^{-20}\cdot 9.8\cdot 2}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300}} = 2{,}7\cdot 10^{-15}\text{м}^{-3}$$

$$n_2 = 0{,}995\cdot 10^6\text{м}^{-3}$$

Контрольные вопросы

1. Запишите формулу распределения Максвелла молекул по скоростям. Что характеризует распределение Максвелла?
2. Что такое наиболее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости молекул газа? По каким формулам их можно вычислить?
3. Что определяет барометрическая формула?
4. Запишите закон Больцмана распределения молекул в потенциальном поле сил.
5. Как определяется число степеней механической системы? Какая энергия приходится на одну степень свободы молекулы?
6. Решите задачу: какая доля молекул кислорода имеет скорость в пределах от 100 до 110 м/с? Температура газа – 300 К. При решении учесть, что кривую распределения Максвелла в малых интервалах интегрирования можно с хорошей точностью аппроксимировать прямой линией.
7. Решите задачу: найти среднюю скорость молекул азота при температуре 273 К.

ТЕМА 10. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Как распределение Максвелла, так и распределение Больцмана применяют для термодинамически равновесных состояний. Молекулярно-кинетическая теория разработана также для некоторых неравновесных состояний. Рассмотрим явления переноса в неравновесных системах. Это: диффузия (перенос массы), явление теплопереноса (перенос энергии), внутреннее трение (перенос импульса).

Для рассмотрения этих явлений мы должны иметь представление о таких понятиях, как длина свободного пробега, число столкновений молекул в единицу времени.

10.1. Длина свободного пробега, число столкновений молекул

Молекулы газа, находясь в состоянии хаотического движения, постоянно сталкиваются друг с другом.

Между двумя последовательными столкновениями молекулы проходят некоторый путь *l*, называемый *длиной свободного пробега*.

Этот путь различен у каждой молекулы, но можно говорить о средней длине свободного пробега.

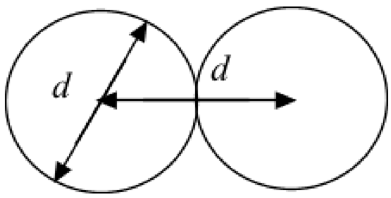


Рис. 10.1

Минимальным расстоянием, на которое сближаются, при столкновении, центры двух молекул, называется эффективным диаметром молекулы *d*.

Эффективный диаметр молекулы (Рис. 10.1) уменьшается с ростом средней скорости, а, следовательно, температуры.

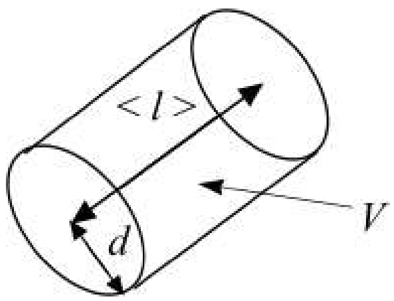


Рис. 10.2

За 1 секунду молекула походит путь, равный $L = \langle v \rangle \cdot 1c$ если известно среднее число столкновений за 1 секунду $\langle Z \rangle$, то длина пробега

$$\langle l \rangle = \langle v \rangle / \langle Z \rangle$$

Среднее число столкновений за 1 секунду равно числу молекул в объеме "ломаного цилиндра":

$$\langle Z \rangle = n\langle V \rangle\,,$$

где n – концентрация молекул, объем

$$V = \pi d^2 \langle v \rangle$$

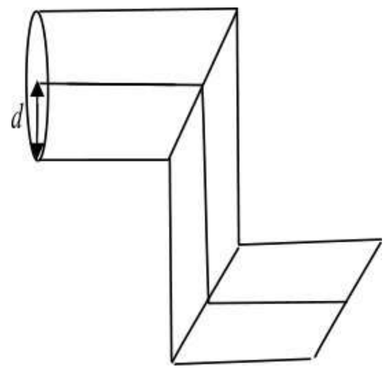


Рис. 10.3

На Рис. 10.2 показано, как определять объем цилиндра, а на Рис. 10.3 показано, что такое "ломаный цилиндр".

Таким образом, среднее число столкновений за 1 секунду

$$\langle Z \rangle = n\pi d^2 \langle v \rangle$$

и средняя длина свободного пробега

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle Z \rangle} = \frac{1}{n\pi d^2}$$

Мы предположили, что все остальные атомы неподвижны. С учетом их движения

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$$

Рассмотрим явления переноса.

10.2. Диффузия

***Диффузия:* самопроизвольное проникновение атомов соприкасающихся газов, жидкостей и твердых тел.**

При соприкосновении газа 1-го типа с газом 2-го типа перпендикулярно границе раздела наблюдается градиент удельной плотности каждого газа $d\rho_i/dx$. Возможно также представить газовую смесь двух типов атомов, причем существуют различия концентрации каждого типа атомов в различных точках рассматриваемого объема. Естественно, при достаточно долгом наблюдении, концентрация газов обоих типов выравнивается, что также будет происходить благодаря диффузии. В этом случае также мы можем наблюдать градиент плотности i-го газа $d\rho_i/dx$. (В таких экспериментах исключается перемешивание смеси).

Процесс диффузии подчиняется закону Фика:

$$j_m = -D\frac{d\rho_i}{dx}$$

здесь j_m – плотность потока массы i-го газа, определяется массой i-го газа, проходящего через единичную площадку за единицу времени: $j_m = dm/\Delta S_{\perp}dt$; D – коэффициент диффузии или просто диффузия.

Диффузия D численно равна плотности потока массы при градиенте плотности, равном единице, в идеальном газе она определяется соотношением:

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle$$

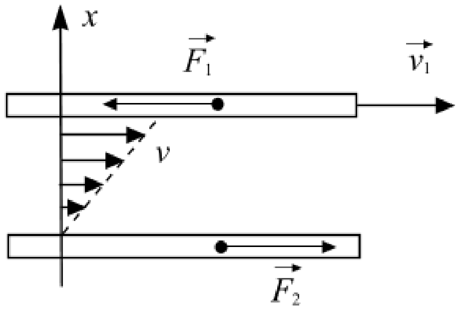


Рис. 10.4

10.3. Внутреннее трение (вязкость)

Рассмотрим две близко расположенные пластины (Рис. 10.4), между которыми находится идеальный газ, причем эти пластины движутся друг относительно друга.

При этом слои газа или жидкости также текут с различной скоростью. Атомы газа ударяются о пластины и получают или передают им горизонтальный импульс, что приводит к силам, действующим на эти пластины – силам трения F_1 и F_2.

Так как между пластинами находится большое количество атомов, силы взаимодействия между пластинами F_1 и F_2 осуществляются посредством сил взаимодействия слоев газа или жидкости, поэтому называются силами ***внутреннего трения***. Такие силы появляются в результате вертикального перемещения атомов, похожего на диффузию, однако в данном случае переносится не сорт атомов, с их импульс.

Сила внутреннего трения определяется законом Ньютона:

$$F = \eta\left|\frac{dv}{dx}\right|S$$

здесь: F – сила, действующая на площадку S, dv/dx – градиент скорости, η – динамическая вязкость (коэффициент динамической вязкости).

Из молекулярно-кинетической теории известно:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle = \rho D$$

Если мы разделим уравнение Ньютона на площадь S, то тогда:

$$\frac{F}{S} = \frac{dp}{dt \cdot S} = j_p = -\eta \frac{dv}{dx}$$

здесь j_p – плотность потока импульса, знак "–" показывает, что поток направлен в сторону убывания импульса молекул текущего газа или жидкости.

10.4. Теплопроводность

Если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени, вследствие столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий, то есть температур.

Перенос тепла в газе, жидкости, твердом теле подчиняется закону Фурье:

$$j_\varepsilon = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

где j_ε – плотность теплового потока, то есть $j_\varepsilon = dW/dS_\perp dt$ – энергия, переносимая через единичную площадку за единицу времени, dT/dx – градиент температуры, знак "–" показывает, что поток направлен в сторону убывания температуры, λ – теплопроводность, численно равна плотности теплового потока при единичном градиенте температур. Известно, что

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle = c_V \eta$$

c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении.

Как видно, процессы переноса массы (диффузия), импульса (внутреннее трение), кинетической энергии (теплопроводность) описываются схожими уравнениями.

Следующая лекция посвящена обзору термодинамики.

Контрольные вопросы

1. Что такое длина свободного пробега, эффективный диаметр молекул газа?
2. Запишите и объясните закон Фика.
3. Что такое коэффициент диффузии? Какой формулой он описывается для характеристики идеального газа?
4. Что такое внутреннее трение? Запишите и объясните закон Ньютона для внутреннего трения.
5. Как определяется динамическая вязкость? Как ее можно выразить через длину свободного пробега и плотность?
6. Что такое теплопроводность? Запишите и объясните закон Фурье. Как можно выразить коэффициент теплопроводности через динамическую вязкость?
7. Решите задачу: средний диаметр молекулы водорода равен $2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м. Найти среднюю длину свободного пробега молекул водорода при нормальных условиях (температура равна 273 K, давление равно $1{,}01 \cdot 10^5$ Па).
8. Решите задачу: найти динамическую вязкость водорода для условий, показанных в предыдущей задаче. Считать водород идеальным газом.

ТЕРМОДИНАМИКА

ТЕМА 11. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Термодинамический метод: не рассматривается внутреннее строение изучаемых тел и характер движения отдельных их частиц. Термодинамический метод основан на анализе условий и количественных соотношений при различных превращениях энергии, происходящих в системе.

Раздел физики, в котором физические свойства макроскопических систем изучают с помощью термодинамического метода, называется термодинамикой.

Мысленно выделенная макроскопическая система, рассматриваемая методами термодинамики, называется термодинамической системой.

Все тела, не включенные в данную систему, называются внешними телами или внешней средой.

Открытой системой называется термодинамическая система, которая может обмениваться веществом с внешней средой, *закрытая* не может обмениваться веществом с внешней средой.

Изолированная система не может обмениваться с внешней средой ни веществом, ни энергией.

Адиабатная система: система, не способная обмениваться энергией с окружающей средой, посредством теплообмена.

Термодинамическими параметрами называются физические величины, служащие для характеристики состояния термодинамической системы. Термодинамические параметры: давление (p), объем (V), температура (T), концентрация (n), масса (m).

Различают *интенсивные* (T, p, n) и *экстенсивные* (m,V) параметры. Экстенсивные зависят от количества вещества, а интенсивные – нет.

Температура имеет смысл только для большого количества атомов (а не для отдельных), для равновесного состояния термодинамической системы.

Под равновесным состоянием понимают состояние термодинамической системы, характеризующееся при постоянных внешних условиях неизменностью параметров во времени и отсутствием потоков (например, энергии или вещества).

Температура во всех точках термодинамической системы, находящейся в равновесии постоянна (температура – мера теплового движения молекул).

Термодинамика обычно рассматривает изменения во времени термодинамических систем, сопровождаемые изменением термодинамических параметров, такое изменение называют ***термодинамическим процессом***.

Термодинамический процесс называется равновесным, если в этом процессе система проходит ряд бесконечно близких термодинамически равновесных состояний.

Термодинамические процессы: 1) Изобарный $p = const$; 2) изохорный $V = const$; 3) изотермический $T = const$; 4) адиабатный – обмен теплом с внешней средой не происходит.

Термодинамическая система характеризуется внутренней энергией U, зависящей только от внутреннего состояния системы.

Также она может обладать внешней энергией: потенциальной и кинетической. В обычных случаях мы не будем учитывать внешнюю механическую энергию.

Обмен энергией с внешней средой возможен двумя путями: путем совершения работы и посредством теплообмена.

Энергия, полученная путем теплообмена с внешними телами, называется теплотой *Q*.

Работу над системой производят внешние силы. Для совершения работы необходимо, чтобы перемещались внешние тела (вспомним механическую работу):

$$\delta A = Fdx$$

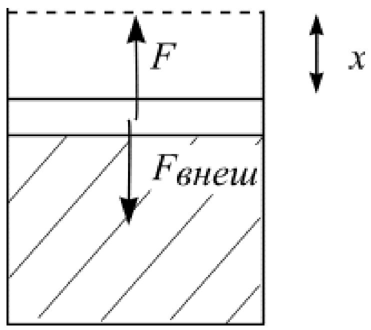


Рис. 11.1

Система и внешние тела взаимодействуют посредством сил давления ($p=F/S$) (Рис. 11.1). Силы, с которыми внешние тела действуют на термодинамическую систему, равны силам, с которой система действует на внешние тела

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}'$$

поэтому

$$A = -A'$$

– работа, которую производит система в термодинамическом процессе, равна работе, которую производят внешние силы над системой, взятой со знаком минус.

11.1. Первое начало термодинамики

Рассмотрим равновесный процесс перехода термодинамической системы из состояния 1-го в состояние 2-е:

в этом процессе система совершает работу A_{12} и получает тепло Q_{12} (A,Q – могут быть как положительными, так и отрицательными).

I начало термодинамики:

Тепло, сообщаемое системе, расходуется на изменение внутренней энергии и на совершение системой работы против внешних сил.

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$$

или

$$Q_{12} = U_2 - U_1 + A_{12}$$

Если тепло не подводится, а отводится $Q < 0$.

Расширение газа: работа

$$A_{12} = F \cdot x = \frac{F}{S} Sx = p\Delta V$$

11.2. Применение первого начала термодинамики к изо – процессам.

Изохорический процесс: $V = const \quad \Longrightarrow \quad A = 0$

Из 1-го начала термодинамики: $Q = \Delta U$**,** также

$$V\Delta p = \frac{m}{\mu} R\Delta T$$

<u>Теплоемкостью</u> тела называется физическая величина, численно равная отношению теплоты *δQ*, сообщаемой телу, к изменению температуры *dT* в рассматриваемом термодинамическом процессе:

$$C^* = \frac{\delta Q}{dT} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{К}}\right]$$

Удельная теплоемкость

$$\text{c} = \frac{C^*}{m} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right]$$

Выражение теплоты через удельную теплоемкость

$$\delta Q = m\,c\,dT$$

Молярная теплоемкость:

$$C = \mu c = \frac{\mu}{m}\frac{\delta Q}{dT}\left[\frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}\right]$$

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C dT$$

Данные формулы можно применить в 1 началу термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

$$\frac{m}{\mu} C dT = dU + \delta A$$

В случае **изохорического процесса:**

$$\frac{m}{\mu} C dT = dU$$

Обозначим молярную теплоемкость при постоянном объеме как C_V, проинтегрируем уравнение, тогда

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T$$

Поэтому

$$Q = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1)$$

Изобарический процесс: $p = const$

1-е начало термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

C_p – молярная теплоемкость при постоянном давлении, $\delta A = pdV$

$$\frac{m}{\mu} C_p dT = dU + pdV$$

$$\frac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1) = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1)$$

заметим, что из уравнения Менделеева – Клайперона

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1)$$

$$Q = \frac{m}{\mu} C_p(T_2 - T_1)$$

подставим $U_2 - U_1 = \frac{m}{\mu} C_V(T_2 - T_1) \quad \Rightarrow$

$$\frac{m}{\mu} C_p(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} C_V(T_2 - T_1) + \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) \quad \Rightarrow$$

$$C_p = C_V + R$$

Мы получили уравнение Майера

$$C_p - C_V = R$$

Изотермический процесс: T = const

1 начало термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A$$

$$U = f(T) = const \quad \Rightarrow$$

$$\delta Q = \delta A \quad \Rightarrow$$

$$Q = A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{m}{\mu} RT \frac{1}{V} \quad \Rightarrow$$

$$Q = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Адиабатический процесс: $Q = 0$

Практически адиабатный процесс осуществляется при быстром сжатии или расширении газа.

1-е начало термодинамики

$$0 = dU + \delta A$$

$$\delta A = -dU$$

$$pdV = -\frac{m}{\mu} C_V dT$$

Получаем дифференциал уравнения Менделеева–Клайперона:

$$d(pV) = \frac{m}{\mu} RdT = pdV + Vdp$$

$$pdV = -\frac{m}{\mu} RdT \frac{C_V}{R} = -\frac{C_V}{R}(pdV + Vdp)$$

$$\begin{cases} RpdV = -C_V(pdV + Vdp) \\ R = C_p - C_V \end{cases} \Rightarrow$$

$$(C_p - C_V)pdV = -C_V(pdV + Vdp)$$

$$C_p pdV - C_V pdV + C_V pdV + C_V Vdp = 0$$

$$C_p pdV + C_V Vdp = 0$$

$$\frac{C_p}{C_V} pdV + Vdp = 0, \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_V} - \text{ показатель адиабаты}$$

$$\gamma pdV + Vdp = 0$$

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$\gamma \int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dp}{p}$$

$$\gamma \ln V = -\ln p + \ln const$$

$$\ln V^\gamma p = \ln const$$

Мы получили уравнение Пуассона:

$$V^\gamma p = const$$

Используя уравнение Менделеева–Клайперона можно записать уравнение Пуассона в координатах $V - T$, $P - T$:

$$p = \frac{T}{V} \frac{m}{\mu} R \quad \Rightarrow V^\gamma \frac{T}{V} = const$$

$$V^{\gamma - 1} T = const$$

возведем в степень $1/(\gamma - 1)$

$$VT^{\frac{1}{\gamma - 1}} = const$$

подставим

$$V = \frac{T}{p}\frac{m}{\mu}R \;\; \Rightarrow \left(\frac{T}{p}\right)^{\gamma} p = const$$

$$T^{\gamma}p^{1-\gamma} = const$$

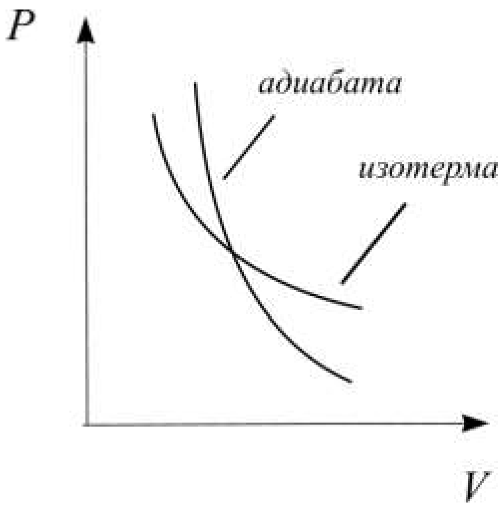


Рис. 11.2

возведем уравнение в степень $1/(1-\gamma)$:

$$pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = const$$

Как можно характеризовать адиабатный процесс? Сравним его с изотермическим.

$$p = \frac{const}{V}$$

и

$$p = \frac{const}{V^{\gamma}}$$

Наклон графика:

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{const}{V^2} = -\frac{p}{V}$$

У адиабаты

$$\frac{dp}{dV} = \frac{d}{dV}\left(\frac{const}{V^{\gamma}}\right) = -\gamma\frac{const}{V^{\gamma+1}} = -\gamma\frac{p}{V}$$

Наклон графика адиабаты будет в γ раз круче (см. Рис. 11.2)!

11.3. Политропные процессы

Можно обобщить адиабатный процесс:
уравнение политропы: $pV^n = cons$, где

$n = 0$ – изобарный процесс
$n = 1$ – изотермический процесс
$n = \gamma$ – адиабатный процесс
$n = \pm\infty$ – изохорический процесс

Контрольные вопросы

1. Что такое термодинамическая система?
2. Какая термодинамическая система является открытой, изолированной, адиабатной?
3. Что такое равновесное состояние системы; равновесный процесс? Перечислите известные вам равновесные процессы.
4. Сформулируйте 1 начало термодинамики; как определяется положительный или отрицательный знаки слагаемых в уравнении 1 начала?
5. Дайте определение теплоемкости, удельной теплоемкости, молярной теплоемкости.
6. Как определяется теплоемкость при постоянном давлении, при постоянном объеме? Запишите и объясните уравнение Майера.
7. Проведите вывод уравнения Пуассона, объясните его смысл.
8. Решите задачу: теплоемкость моля идеального двухатомного газа при постоянном объеме равна $C_V = \frac{5}{2}R$. Чему равна молярная теплоемкость двухатомного идеального газа при постоянном давлении? Насколько градусов нагреется двухатомный идеальный газ, если одному молю передать тепло, равное 100 Дж при постоянном давлении?
9. Решите задачу: в адиабатическом процессе воздух удвоил свой объем. Как изменилось давление воздуха, если его показатель адиабаты равен 1,4?

ТЕМА 12. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

12.1. Круговые процессы

Как отмечалось в предыдущей теме, возможно рассмотрение равновесных процессов – процессов, представляющих собой ряд равновесных состояний. Такой процесс является обратимым.

<u>Обратимым</u> называется процесс, который может быть проведен в обратном направлении таким образом, что система будет проходить через те же состояния, что и в прямом ходе.

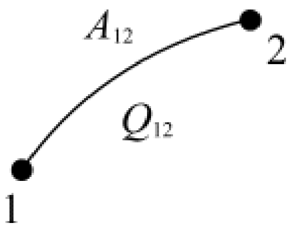


Рис. 12.1

Если процесс обратим, то в прямом направлении термодинамическая система получит тепло Q_{12} и совершит работу A_{12}, в обратном (Рис. 12.1): Q_{21} и A_{21} соответственно, причем $Q_{21} = -Q_{12}$ и $A_{21} = -A_{12}$. Например, если система получает тепло Q и совершает работу A в процессе 12, то в обратном – отдает тепло Q и над системой совершают работу A внешние силы.

<u>Круговым процессом</u> или <u>циклом</u> называется такой процесс, в котором система, после ряда изменений возвращается в прежнее состояние.

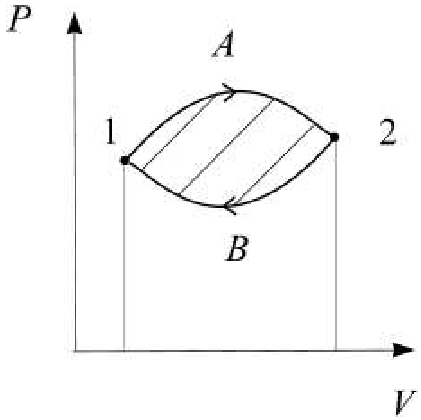


Рис. 12.2

Работа в цикле 1 – A – 2 – B – 1 (Рис. 12.2) равна площади, охватываемой кривой на графике $p = f(V)$: работа $A > 0$.

На участке 1-A-2 $A_{12} > 0$ и работа равна площади под кривой. На участке 2-B-1 $A_{12} < 0$, в сумме получается площадь цикла.

Если система проходит круговой процесс в обратном направлении, то работа $A < 0$.

12.2. КПД тепловой машины

Представим, как может осуществляться такой круговой процесс: при переходе 1-A-2 системе передается тепло, что приводит к расширению газа, при обратном процессе 2-B-1 у системы отбирается тепло, причем $p_{12} > p_{21}$ на большей части пути. Это может быть осуществлено, только если температура при нагреве больше температуры при охлаждении. Реально это происходит, если первая часть процесса осуществляется в контакте с нагревателем, а вторая – в контакте с холодильником, причем $T_н > T_х$.

Запишем 1 начало термодинамики для кругового процесса

$$1A2:\ \ Q_1 = U_2 - U_1 + A_1$$
$$2B1:\ \ -Q_2 = U_1 - U_2 + A_2$$

суммируем

$$Q_1 - Q_2 = A_1 + A_2 = A,$$

здесь A – суммарная работа

Периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет полученного извне тепла, называется <u>тепловой машиной</u>. Такая машина состоит из трех основных частей: нагревателя, холодильника и рабочего тела.

<u>Коэффициент полезного действия</u> определяется как отношение совершаемой за цикл работы к получаемому за цикл теплу.

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Если мы запустим машину в противоположном направлении, над ней будут совершать работу A внешние силы, результатом будет передача тепла от холодильника к нагревателю, то есть будет происходить охлаждение холодильника. Такую машину называют **холодильной машиной** и характеризуют холодильным коэффициентом:

$$k = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

12.3. Второе начало термодинамики

Невозможны процессы, единственным конечным результатом которых, был бы переход тепла от холодного тела к более нагретому телу.

Холодильная машина: кроме перехода тепла еще совершается работа внешними силами!

Другая формулировка *второго начала термодинамики:*

Невозможны такие циклические процессы, единственным конечным результатом которых явилось бы отнятие от некоторого тела тепла и превращение этого тепла в работу.

Иначе говоря: невозможна тепловая машина без холодильника.

Если бы мы предположили обратное, то, например, можно было бы брать энергию от океана и превращать ее в работу. Такое устройство называют "*вечный двигатель второго рода*". В патентных бюро даже не рассматривают изобретения вечного двигателя первого рода – с нарушением 1-го начала термодинамики и 2-го рода – с нарушением 2-го начала термодинамики.

Можно показать, что две формулировки 2 начала термодинамики эквивалентны друг другу на примере тепловой машины. Можно провести доказательство от противного: пусть возможно перетекание тепла от холодного тела к нагретому, тогда мы можем сделать тепловую машину, нагреватель которой соединен с океаном (см. Рис. 12.3).

Рис. 12.3

В результате: вначале тепло (Q_1) передается системе, которая совершает работу, затем часть тепла переходит к холодильнику (Q_2), который в результате этого нагревается, затем мы от более холодного (холодильника) передаем тепло Q_2 океану, то есть нагревателю. В результате совершается работа за счет энергии нагревателя, холодильник не претерпел изменения. Так как переход тепла от холодильника к нагревателю **невозможен** (без проведения работы внешними силами), **невозможен и такой круговой процесс**.

12.4. Цикл Карно

Инженер Сади Карно предложил тепловую машину, которая работает с использованием только обратимых процессов, что позволяет получить максимальный КПД.

Необратимыми являются процессы, у которых теплопередача происходит между телами с различными температурами (T_1 и T_2), причем разница $T_1 - T_2$ имеет заметную величину.

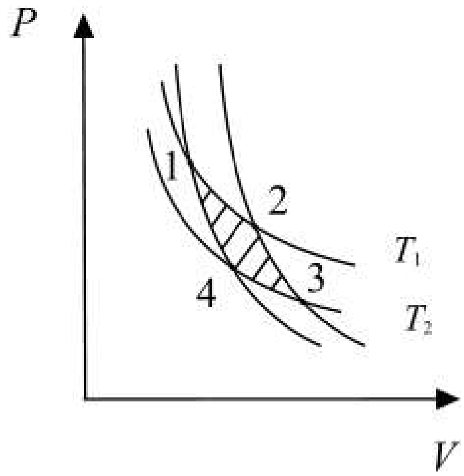


Рис. 12.4

Как мы отмечали, адиабаты более круто проходит на графике *p*-*V*, чем изотермы. Цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат, причем при нагреве $T_н > T_х$ и $T_1 > T_2$ (Рис. 12.4).

За один цикл машина будет осуществлять работу, равную площади, ограниченной кривой на диаграмме $p - V$.

Коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей в режиме обратимого цикла Карно, равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

В случае необратимого цикла (например, с учетом разности температур рабочего тела и нагревателя или с учетом трения) КПД падает, то есть можно записать:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \le \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} \le 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} \ge \frac{T_2}{T_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Q_2}{T_2} \ge \frac{Q_1}{T_1}$$

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \le 0$$

Пусть тепло, которое получает система > 0, а которое отдает – меньше нуля, тогда

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \le 0$$

Получили неравенство Клаузиуса.

Отношение тепла, полученного системой от какого-либо тела к температуре этого тела, называется <u>приведенным количеством теплоты</u>.

Приведенное количество теплоты равно нулю в **равновесных** циклических процессах.

Если разбить процессы теплообмена на небольшие части, то сумму можно представить в виде интеграла:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \le 0 \Rightarrow \int \frac{dQ}{T} \le 0$$

Смысл неравенства Клаузиуса:

Приведенное количество теплоты, полученное термодинамической системой за цикл, <u>меньше нуля</u>, если цикл необратим и <u>равен нулю</u>, если цикл обратим.

12.5. Энтропия

Сумму приведенных теплот можно образовать не только для цикла, но и для любого процесса. Разобьем цикл на две части:

$$\sum_{\substack{1\to 2 \\ (\mathrm{I})}} \frac{\Delta Q}{T} + \sum_{\substack{2\to 1 \\ (\mathrm{II})}} \frac{\Delta Q}{T} = 0 \text{ для обратимых циклов}$$

$$\sum_{\substack{1\to 2 \\ (\mathrm{I})}} \frac{\Delta Q}{T} = -\sum_{\substack{2\to 1 \\ (\mathrm{II})}} \frac{\Delta Q}{T}$$

Мы можем сказать, что если пройдем участок II в обратном направлении (1–2), то знак суммы изменится на противоположный (так как тепло в этом случае меняет знак), тогда

$$\sum_{\substack{1\to 2 \\ (\mathrm{I})}} \frac{\Delta Q}{T} = \sum_{\substack{1\to 2 \\ (\mathrm{II})}} \frac{\Delta Q}{T}$$

То есть приведенная теплота в обратимом процессе не зависит от пути, а только от координат начальной и конечной точки, поэтому ее можно считать функцией состояния.

В обратимом процессе величина $\Delta Q/T$ представляет собой приращение некоторой функции состояния, которая была названа <u>энтропией</u> и обозначена буквой S.

$$\left(\frac{\Delta Q}{T}\right)_{\text{обр}} = \Delta S \ \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = S_2 - S_1$$

(обр)

необратимый процесс:

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} < S_2 - S_1$$

В необратимом процессе изменение энтропии **больше** количества приведенной теплоты полученной системой.

Поэтому в произвольном термодинамическом процессе

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

Еще раз напомним, что температура T – температура тела, от которого система получает или которому отдает тепло ΔQ, в обратимом процессе эта температура совпадает с температурой системы.

Если система изолирована $\Delta Q = 0 \;\Rightarrow$

$$S_2 - S_1 \geq 0$$

$$\Delta S \geq 0$$

Энтропия изолированной системы не может убывать.

В изотермическом процессе $T = const \;\Rightarrow$

$$S_2 - S_1 \geq \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int dQ = \frac{Q}{T}$$

Рассмотрим изменение энтропии изолированной системы.

12.6. Изменение энтропии при передаче тепла

Пусть есть два тела одинаковой массы и одинаковой теплоемкости, имеющих температуры T_1 и T_2. При их контакте, в результате теплообмена, у них устанавливается общая температура:

$$T' = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Рассмотрим изменение энтропии этих тел:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T'} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T'} \frac{CdT}{T} = C \ln \frac{T'}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = C \ln \frac{T'}{T_2}$$

Суммарное изменение энтропии

$$\Delta S = C \ln \frac{T'}{T_1} + C \ln \frac{T'}{T_2} = C \ln \frac{T'^2}{T_1 T_2} = C \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}$$

Каков знак изменения энтропии?

$$\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} = \frac{{T_1}^2 + {T_2}^2 + 2T_1 T_2}{4T_1 T_2} = \frac{{T_1}^2 + {T_2}^2 - 2T_1 T_2}{4T_1 T_2} + \frac{4T_1 T_2}{4T_1 T_2} =$$

$$= 1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2} \Rightarrow$$

$$\Delta S = \ln\left(1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2}\right) > 0$$

В процессе теплопроводности энтропия системы возрастает (что и должно быть, так как это – необратимый процесс).

12.7. Изменение энтропии при расширении газа

Пусть у нас есть идеальный газ объемом V_1. Пусть происходит его расширение без совершения работы до объема V_2 ($V_2 > V_1$). Это возможно, если, например, открыть вентиль (см. Рис. 12.5):

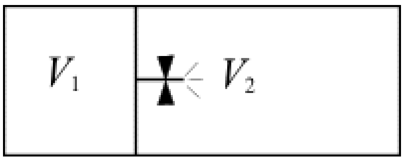


Рис. 12.5

Пусть эта система теплоизолирована, тогда по 1 началу термодинамики:

$$\left.\begin{array}{r} Q = \Delta U + A \\ Q = 0 \\ A = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Delta U = 0 \Rightarrow$$

$$T = const$$

Как изменится энтропия в этом процессе?

Несмотря на то, что теплопередачи нет, энтропия изменится (так как процесс необратимый).

Приведем систему в это состояние другим путем.

Пусть система расширяется обратимо, совершая работу, в изотермическом процессе. Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A \implies Q = A$$

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = Q$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\text{так как } V_2 > V_1, \Delta S > 0$$

Что и требовалось доказать – энтропия в неравновесном процессе **возросла**!

Как мы видим в неравновесных процессах (к которым относится теплопередача) энтропия системы возрастает. Рост энтропии указывает на направление самопроизвольного процесса, таким образом можно дать третью формулировку 2 начала термодинамики:

В замкнутой термодинамической системе невозможны процессы, приводящие к убыванию энтропии.

Например – самопроизвольный переход тепла от холодного тела к горячему.

12.7. Теорема Нернста – 3 начало термодинамики

Уравнение $S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$ показывает изменение энтропии, а абсолютное значение энтропии неизвестно. Нернст доказал теорему, которую также называют 3 началом термодинамики. Эта теорема позволяет найти абсолютное значение энтропии:

При стремлении абсолютной температуры к нулю энтропия любого тела также стремится к нулю.

$$\lim_{T \to 0} S = 0$$

Эта теорема позволяет найти значение энтропии любого вещества:

$$S = \int_0^T \frac{dQ}{T}$$

Если известна, например, теплоемкость тела при постоянном давлении, энтропию можно вычислить по формуле:

$$S = \int_0^T \frac{C_p(T)dT}{T}$$

12.8. Связь энтропии и термодинамической вероятности

Статистическая физика понимает под <u>термодинамической вероятностью</u> *W* число различных способов, которыми может быть осуществлено данное состояние.

Равновесная термодинамическая система находится в состоянии с наибольшей термодинамической вероятностью.

<u>Математическая вероятность</u> данного события равна отношению термодинамической вероятности к общему числу возможных конфигураций системы.

Пусть у нас есть сосуд, содержащий N молекул. Разделим мысленно сосуд на 2 равные части. Найдем число способов W, того, что в первой половине сосуда находится N_1 молекул. Результаты представим в виде таблицы:

	N=3	N=4	N=5	N=6
N_1	термодинамическая вероятность W			
0	1	1	1	1
1	3	4	5	6
2	3	6	10	15
3	1	4	10	20
4	–	1	5	15
5	–	–	1	6
6	–	–	–	1

Найдите самостоятельно формулу для нахождения числа способов расположения молекул W.

Заметим, что общее число возможных конфигураций равно сумме вероятностей W в столбце. Если мы разделим значение W в каждом столбце на такую сумму, то получим математическую вероятность.

Больцман показал, что энтропия связана с термодинамической вероятностью W простой формулой

$$S = k \ln W$$

Замкнутая система стремится к равновесному – наиболее вероятному состоянию, состоянию с наибольшей термодинамической вероятностью.

Вспомним 2 начало термодинамики: невозможен самопроизвольный переход тепла от менее нагретого тела к более нагретому. Так как теплопроводность приводит к росту энтропии, обратный процесс привел бы к убыванию энтропии, а, следовательно, к уменьшению термодинамической вероятности такой системы, что невозможно. Равновесное состояние системы оказывается наиболее вероятным, то есть переход к равновесию означает рост термодинамической вероятности, следовательно, рост энтропии. Таким образом, 2 начало термодинамики получает наглядное статистическое объяснение.

В информатике используется понятие *энтропии информации*. Как следует из второго начала термодинамики, энтропия замкнутой системы возрастает до максимального значения. Часто энтропию считают синонимом беспорядка, поэтому говорят, что в замкнутой системе беспорядок возрастает. То же можно сказать и об информации: если система замкнута и не производится работа по упорядочению, сохранению информации, со временем энтропия, то есть беспорядок, возрастает. Это значит, что, например, при хранении информации на диске, нужно периодически его проверять, проверять систему на вирусы, и, со временем, необходимо обновлять оборудование.

12.9. Энтропия идеального газа

Энтропия – величина аддитивная, поэтому, вначале мы получим выражение для 1-го моля идеального газа, затем перейдем к общему выражению.

Запишем 1 начало термодинамики

$$dQ = C_V dT + p dV,$$

поделим на T

$$dS = \frac{dQ}{T} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV$$

заметим, что для одного моля

$$pV = RT \Longrightarrow \frac{p}{T} = \frac{R}{V}$$

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}$$

Возьмем неопределенный интеграл

$$S_м = C_V \ln T + R \ln V + S_0$$

S_0 – константа интегрирования

Подставим $V = \dfrac{RT}{p}$

$$\left.\begin{array}{c} S_м = C_V \ln T + R \ln R + R \ln T - R \ln p + S_0 \\ S_0' = S_0 + R \ln R \\ C_p = C_V + R \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$S_м = C_p \ln T - R \ln p + S_0{}'$$

Заменим $T = \dfrac{pV}{R}$

$$\left.\begin{array}{c} S_м = C_p \ln p + C_p \ln V - C_p \ln R - R \ln p + S_0{}' \\ S_0'' = S_0{}' - C_p \ln R \\ C_p - R = C_V \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$S_м = C_V \ln p + C_p \ln V + S_0{}''$$

В общем виде, m/μ для молей:

$$S = \frac{m}{\mu} S_м = \frac{m}{\mu}(C_V \ln T + R \ln V + S_0)$$

$$S = \frac{m}{\mu}\left(C_p \ln T - R \ln p + S_0{}'\right)$$

$$S = \frac{m}{\mu}\left(C_V \ln p + C_p \ln V + S_0{}''\right)$$

12.10. Изменение энтропии при смешении двух разных газов.

Пусть есть 2 различных газа при одинаковых давлениях $p_1 = p_2$, одинаковое количество – 1 моль каждого, находятся в равных объемах V, разделенных перегородкой.

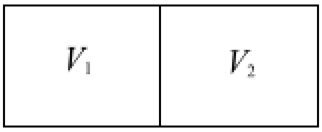


Рис. 12.6

После того, как перегородка будет убрана, газы начнут взаимно диффундировать и, в конце концов, полностью перемешаются (Рис. 12.6).

Этот процесс необратим, поэтому энтропия в нем должна возрастать.

Запишем начальную энтропию:

$$S_{\text{нач}} = C_{p_1} \ln T - R \ln p + S'_{01} + C_{p_2} \ln T - R \ln p + S'_{02}$$

После смешения каждый газ будет иметь парциальное давление $p' = p/2$.

$$S_{\text{кон}} = C_{p_1} \ln T - R \ln \frac{p}{2} + S'_{01} + C_{p_2} \ln T - R \ln \frac{p}{2} + S'_{02}$$

$$S_{\text{кон}} - S_{\text{нач}} = -2R \ln \frac{p}{2} + 2R \ln p = -2R \ln p + 2R \ln p - 2 \ln \frac{1}{2} = 2\, R \ln 2$$

Как и требовалось доказать, энтропия смеси возросла.

Если проанализировать полученные уравнения с точки зрения теоремы Нернста, то мы заметим противоречие: из $T \to 0$ следует $\ln T \to -\infty$. При охлаждении реальных газов молекулы сближаются и при некоторой температуре эти газы переходят в жидкое состояние. Но тогда любая система теряет свойства идеальных газов, поэтому и уравнения, полученные для идеальных газов, не подчиняются теореме Нернста, которая относится к реальным газам, жидкостям и твердым телам.

Контрольные вопросы

1. Как определяется обратимый термодинамический процесс, круговой процесс?
2. Что такое тепловая машина? Чему равен ее к.п.д.? Что такое холодильная машина?
3. Сформулируйте 2 начало термодинамики.
4. Что такое вечный двигатель первого рода, вечный двигатель второго рода? Почему они не могут работать?
5. Что такое приведенное количество теплоты? Запишите и объясните неравенство Клаузиуса.
6. Дайте определение энтропии. Как ведет себя энтропия в неравновесных процессах, в замкнутой системе? Сформулируйте 2 начало термодинамики с использованием понятия энтропии.
7. Сформулируйте 3 начало термодинамики.
8. Что такое термодинамическая вероятность? Запишите формулу Больцмана, описывающую связь энтропии и термодинамической вероятности.
9. Решите задачу: за один цикл двигатель получает от топлива 5 кДж тепла и выбрасывает с отработанным топливом 3,5 кДж тепловой энергии, также за счет потери тепла от теплопередачи через стенки, двигатель теряет 500 Дж тепла за цикл. Найти к.п.д. двигателя.
10. Решите задачу: идеальный газ в изотермическом процессе отдал 600 Дж тепла при температуре 300 К. Чему равно изменение энтропии газа?

Ответы к задачам в контрольных вопросах

Ответы к задачам по теме 1:

1)$\Delta r = 22$ м, $v = 20{,}2$ м/с, $a_\tau = 9{,}5$ м/с^2, $a_n = 2{,}42$ м/с^2
2) $v_ч = 1$ м/с, $v_п = 2$ м/с, $t_0 = 10$ с, $\Delta x_ч = -5$ м, $\Delta x_п = 5$ м

Ответы к задачам по теме 2:

1) $\omega = 2$ рад/с, $\varphi = 5$ рад, $v = 1$ м/с, $a_n = 0{,}5$ м/с^2, $a_\tau = 0{,}2$ м/с^2, $a = 0{,}54$ м/с^2
2) $\omega = 160$ рад/с, $a_n = 6400$ м/с^2, $v_1 = 80$ м/с, $v_2 = 0$ м/с

Ответы к задачам по теме 3:

1) $F_н = 3{,}55$ Н, $F = 2{,}65$ Н, $a = 8{,}17$ м/с^2 ; 2) $v = 5{,}94$ км/с

Ответы к задачам по теме 4:

1) $\omega = 0{,}4$ рад/с, $l = 4$ м ; 2) $I = 0{,}015$ кг $\cdot$ м^2

Ответы к задачам по теме 5:

1) $v = 3{,}6$ м/с, $Q = 33{,}9$ Дж; 2) $E = 2{,}56 \cdot 10^{29}$ Дж

Ответы к задачам по теме 6:

1) $F_1 = 160$ Н, $\Delta F = 64$ Н 2) $F_К = 0{,}126$ Н

Ответы к задачам по теме 7:

1) $T_1 = 1{,}42$ с, $T_2 = 3{,}49$ с 2) $\nu_1 = 15{,}9$ с, $\nu_2 = 13{,}8$ с

Ответы к задачам по теме 8:

1) $V = 15{,}5$ л 2) $n = 2{,}68 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$

Ответы к задачам по теме 9:

1) $\Delta N/N = 0{,}021$ 2) $v = 454$ м/с

Ответы к задачам по теме 10:

1) $< l > =$ 0,16 мкм 2) $\eta =$ 8,0 мкПа $\cdot$ с

Ответы к задачам по теме 11:

1) $C_p = 7/2\,R$; $\Delta T = 3{,}44\,K$ 2) $p_2/p_1 = 0{,}38$

Ответы к задачам по теме 12:

1) к.п.д $= 20\%$ 2) $\Delta S = -2$ Дж/К

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И.В. Курс общей физики: учеб. пособие для втузов в 5 кн./ И.В. Савельев. − М.: АСТ: Астрель , 2006.

2. Детлаф, А.А. Курс физики: учебное пособие для втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – 6-е изд. − М.: Академия, 2007. – 719 с.

3. Иродов, И.Е. Механика. Основные законы: учебное пособие для физ. специальностей вузов / И. Е. Иродов. − М.: БИНОМ. Лаборатория знаний , 2007. − 309 с.

4. Ферми, Э. Термодинамика/ Э.Ферми. – Харьков: Изд-во Харьк. университета,1973. – 163 с.

4. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике: учеб. пособие для вузов / И. Е. Иродов. − М.: БИНОМ. Лаборатория знаний , 2007. − 431 с.

5. Чертов, А.Г. Задачник по физике: учебное пособие для втузов / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. − 8-е изд. − М.: Физматлит, 2007, 640 с.